

數學與音樂的對話：探討莫札特音樂的數學 應用及其效應

翁瑞霖

輔英科技大學應用化學系

摘要

數學是推理中的音樂，而音樂則是感覺中的數學。代表理性的數學，其規律、和諧與秩序所產生的美感，雖無聲音之傳遞，但與音樂是根本相通的；而代表感性的音樂，其音強、音高、音色、節奏、旋律、曲式及風格，雖無明顯之數字表達，但數學的蹤影卻處處可見。在音樂的領域中，運用數學來處理相關問題的範例很多，本文乃運用數學的各種運算，探討其在莫札特樂曲結構分析的應用，包括敘述音樂領域中數學的應用範例；莫札特的音樂效應；探討莫札特樂曲結構之黃金比例的應用，而呈現了完美的數學比例關係；及敘述莫札特第三(G 大調)、四(D 大調)和五號(A 大調)小提琴協奏曲第一樂章樂曲結構的數學解析，而展現了莫札特創作之和諧性和規律性，也因此說明了為什麼莫札特音樂不論在創造力、學習力、健康和治療方面，都被證實能發揮其神奇的效應而受到廣大的重視等，在在都顯示出數學與音樂密不可分的關係。

關鍵字：數學、音樂、黃金比例、莫札特、協奏曲

壹、緒論

在一般的觀念中，數學與音樂是兩條涇渭分明的平行線，數學就是用十個阿拉伯數字和若干符號所造出一個「真」的世界，而音樂則是用五線譜和一些音符所組成的一個「美」的世界。然而追溯至數千年前，其實數學與音樂都是藝術領域的一份子。西元前五、六世紀，古中國春秋戰國時代有禮、樂、射、御、書、數「六藝」，為當時知識份子必須學習的一些基礎科目，其中的樂是音樂，數則是算術。而在同一時期古希臘則將藝術分為「通俗藝術」和「自由藝術」，數學與音樂均屬後者。一直到十五世

紀文藝復興時代(1450~1550)，自由藝術中還包含著法律、天文等今天已被歸屬為社會科學或自然科學範疇的項目(蔣勳，1996)。文藝復興時期的教育更將音樂、數學及天文學視為一體，將算術、幾何、天文及音樂統整在數學之中，成為西方中世紀時代所謂「四藝」的教育內容(曾志華，2000)。

到了十八世紀，西方正式提出「美的藝術」(Les Beaux Arts)的觀念，也就是我們今天「美術」這個詞彙的來源。美術在十八世紀的歐洲，泛指一切為「美」的目的存在之人類活動，初步為我們今天統稱的「藝術」

劃定了一個基本範圍，至此數學不再屬於藝術的類別而自成了一個系統(蔣勳，1996)。也因為各種領域分工愈細，壁壘愈分明的結果，使得數學與音樂逐漸形成了對立的兩個系統：數學是理性精確的，而音樂是柔美浪漫和感性的(曾志華，2000)。然而，處在這個多元的社會當中，科學、藝術和人文早已開始產生對話，它們之間原本存在的鴻溝也隨著教育改革而逐漸消失。當然我們不敢期望將會走向中古時期的知識領域分類，但肯定的是科學與人文或藝術絕非對立，而是有所對話、關聯及相互影響的。本研究即是藉由數學與音樂的對話，探討數學與莫札特(Wolfgang Amadeus Mozart)音樂的關係。

音樂所引起的特定振動，經常會導致心

理和生理上的效應；而所謂的音樂神效，不論是在創造力、注意力、學習力、記憶力、健康和治療方面，近幾年來都廣受社會大眾的重視，並開始進行這種效果在神經物理學方面的研究。研究結果顯示，莫札特和他同時代音樂家們所創造的音樂，產生的音樂效應最為顯著；尤其是莫札特音樂所創造出的神奇力量，可以促進協調系統和更高的腦部功能運動(Leng, 1991；Campbell, 1999)。本研究將藉由數學的演算來解析莫札特的音樂，進而探討莫札特音樂中所存在的數學形式及其關聯性。期望能提供音樂的另一種思考模式，以促進科學與人文藝術的融合，成為跨領域科際整合研究的一個參考範例。

貳、研究目的與方法

一、研究目的

本研究的目的是期望藉由數學與音樂間的密切關係，以及在音樂領域中的數學應用範例，實際運用數學的演算來解析莫札特的音樂，從而探討莫札特音樂中存在的數學關係與形式，以佐證其與莫札特音樂效應的關聯性。

二、研究方法

本研究之方法為文獻資料的蒐集和彙整、分析和探討及簡單的數學解析模式之建立。其研究步驟如下：

首先蒐集和彙整數學與音樂的對話以及莫札特音樂效應之相關文獻資料；並由後續的文獻資料分析和探討過程中，了解數學在音樂領域中之各種應用情形和數學與音樂互動的相關範例；同時由莫札特音樂所產生的效應中，得知其小提琴協奏曲之影響效

果最佳(Campbell, 1999)，進而選定莫札特小提琴之第三號 G 大調 K.216、第四號 D 大調 K.218、第五號 A 大調 K.219 協奏曲為本研究的範圍。

在確認研究素材之後，我們著手建立簡單的數學解析模式，其過程如下：首先分析此 3 首樂曲之結構，是否符合完美數學比例關係的黃金比例。本研究採用以小節數來計算此 3 首協奏曲樂曲之結構比例。而為了分析和敘述之方便，本研究對於樂曲結構是否遵守黃金分割原則，作了以下之定義：樂曲重要分段處對全曲之小節數比值，與黃金數 0.618 之誤差在 5%(即 0.587 ~ 0.649)以內，為黃金分割法則存在特別顯著之符合黃金比例者；誤差在 10%(即 0.556 ~ 0.680)以內，為存在黃金分割法則之近似黃金比例者；而超過 10%以上者則屬黃金分割法則不存在之範圍(翁瑞霖，2004a)。

在計算和分析莫札特樂曲結構與黃金比例的關係之後，緊接著探討此 3 首樂曲各樂章之升記號數目和調性之間的關係，並以行列式計算其值。而本研究的最後步驟，則針對此 3 首樂曲第一樂章各段落之小節數、調性、拍號、曲式、速度及其重要主題，作有系統的數學計算和分析；並以第三號為範

例，探討各主要段落樂曲結構所呈現之對稱性、相似性、一致性、和諧性和規律性，這些經常出現在幾何、代數或是統計等數學領域中之美的形式，除了佐證莫札特音樂所發揮之效應之外，對於音樂的教學和學習亦產生實質的助益。

參、名詞解釋

為了便於對本研究內容之了解，本文將有關之名詞界定如下：

一、莫札特音樂效應

意指莫札特音樂在創造力、學習力、健康和治療等方面所產生的影響。

二、音樂的數學應用

運用數學的思維模式、演算方式、統計分析、及推理、實驗、歸納或演繹等方法，來處理或探討音樂領域相關的各種議題。

三、黃金比例

所謂黃金比例，其定義為：將某線段 AC 分為長線段 AB 和短線段 BC 兩部分，如長線段 AB 對全線段 AC 的比，等於短線段 BC 對長線段 AB 的比，則稱此線段之比例為黃金比例，如下列線段所示：



由上述黃金比例的定義得知當 $AB : AC = BC : AB$ 時，稱此線段之比例為黃

金比例(九章出版社編輯部，1992)。假設 AB 段長為 X，BC 段長為 Y，則依原比例關係，可計算出 $Y / X = (\sqrt{5} - 1) / 2 \approx 0.618$ 。故此 0.618 : 1 的比例即是所謂的黃金比例或黃金分割，而 0.618 則稱為黃金數(蔡聰明，2001)。

四、黃金分割法則

已知完美的藝術創作，其基礎就是作品各部份之間完美的數學關係，故音樂結構的美的效應，也同樣有賴於樂曲各部份之間的完美數學比例關係。所謂黃金分割法則，其定義如下：當樂曲之結構符合或近似黃金比例，則其黃金分割點應出現在全曲之黃金數 0.618 或近似 0.618 處；亦即將全曲之小節數乘以 0.618，或更嚴謹的將節拍數乘以 0.618。此時若屬黃金分割點，則此處應相當於該曲之重要段落、附屬主題、轉調段落、主題再現部、展開部或是歌曲的副歌開始之處(童忠良，1993；翁瑞霖，2004a)。

肆、文獻探討

一、數學與音樂的對話

整個天體就是一種和諧，而宇宙的和

諧，則是按一定數字比例規則排列，所建立的秩序。這種唯美的宇宙觀，雖然沒有揭示

出原本的物質真諦，卻對其後之科學美學和音樂美學的發展，產生了極深遠的影響(童忠良，1993)。

音樂是一種力量，可以平衡人類的身體和靈魂，也能串聯起世界各部分；音樂之所以能有這樣的力量，是因為音樂建立在優美的數字比例系統上，而這種比例正是希臘著名哲學家、數學家兼音樂家畢達哥拉斯(Pythagoras)所發現。他是第一位以科學方法探討音樂，也是人類文化史上最早將音樂與數學結合起來思考的人，曾先後到美索不達米亞與埃及的廟宇從事研究，並將七個音階的觀念引進希臘(童忠良，1993；黃嘉彥，2000；Isacoff, 2002)。希臘人對於音樂中最優美的聲音所下的定義是：神聖不可侵犯的數學關係、上帝的指紋。這些聲音透過一些特定的比例，結合兩個不同的音符，形成令人喜悅的和諧。在音樂的神奇比例中，發現上帝透漏了建築教堂的平面圖；文藝復興時代的哲學家們在其中找尋從天堂獲得生命的秘密；作曲家們渴望從古代音樂的贈禮中，獲得馴服野獸、引誘天上靈魂，甚至是引誘樹木從地底冒出地面的能力(Isacoff, 2002)。

而恰當的音樂比例更反應了人類內在本質的波動，好似反射了天體和諧地在各自的軌道上旋轉，例如喀卜勒(Kepler)從音樂長久為人所尊敬的神奇比例中，發現控制天上行星運行的規則，從太陽的位置觀察，土星在近日點時，是以每天 135 秒速度移動一個弧度距離，在遠日點則只需 106 秒，此二數字之比例約為 5：4，恰等於產生大三度音程的兩根弦的振動比例；而木星會產生一個小三度音程；火星則是完全五度音程。以此方式測試，每個星球似乎都會產生一個音樂上的比例數字。此外牛頓(Newton)亦發現音符

頻率的比，與陽光通過一個三稜鏡所形成的顏色配置比例相吻合(Isacoff, 2002)。

數學和音樂都是由抽象的觀念中，創造連貫一致的模式，由離散分立的資料中創造統合的整體，乃是人性基本的組織活動，其模式使我們深信宇宙中必有某種次序(Storr, 1999)。數學源自於人們對自然界規則事物的觀察，是一種研究自然規律的科學，而音樂則是對於聲音中規則變化的認識，二者都是在認識自然，對自然界的事物作描述或探求(曾志華，2000)。因此音樂就是感覺中的數學，是一種隱藏的算術練習，透過潛意識的心靈跟數目字在打交道(蔡聰明，1994)；而數學則是推理中的音樂，兩者的靈魂是完全一致的(歐陽絳，1996)。

在音樂的領域中，運用數學來處理相關問題的範例很多。例如：古希臘的畢達哥拉斯發現弦長的簡單整數比，進而推演出畢氏音階(黃嘉彥，2000)。德國的維爾克邁斯達(Werckmeister)發表十二平均律、古中國朱載堉提出十二平均律計算法(曾志華，2000)。而人類得以發明電視機及其他視訊器材，更是從小提琴的琴弦振動所推導出來的(Stewart, 1997)；並藉由英國泰勒(Taylor)所發表琴弦的基本振動頻率公式所衍生之數學計算方法，提昇弦樂器之教學品質(翁瑞霖，2002)。同時亦由可見光與十二平均律的探討中，以數學演算分析之方式，推論音樂與色彩的相對應關係(翁瑞霖，2003)。而眾所週知的黃金比例，就是和諧性最完美的典型表現，除了建築造型上的普遍運用外，其美的效應亦運用在樂曲各部分之間完美的數學比例關係(童忠良，1993)。

此外，聲音的三個性質音強、音高及音色也與數學有極密切的關係。(一) 音強：聲音的強弱和聲波振幅的平方成正比，外加能

量愈大，則振幅愈大，響度也愈強；以分貝 (dB) 為其比較單位，其定義為 $\text{dB} = 20 \log (P/P_0)$ ，其中 P 表聲壓， P_0 為參考壓力 $2 \times 10^{-10} \text{ atm}$ 。(二) 音高：聲音的高低則決定於發生體振動頻率之高低，頻率愈高其音調愈高，以 sec^{-1} 或 Hz(赫茲 Hertz) 為單位；而琴弦的振動頻率與弦的長度、粗細和鬆緊的關係，可用琴弦的基本振動頻率公式表示之。(三) 音色：音色為每一種樂器獨特的發音特性，主要決定於聲音的振動波形；法國傅立葉 (Fourier) 曾針對週期性聲音進行研究，發現正弦波即是波形最基本的振動成份，若將有限或無限多個各種振幅的正弦波，以各種可能的方式組合，就能獲得所有的振動型式 (Stewart, 1997)。

近代對於音樂的數學研究方面，首推俄裔美籍音樂理論家薛林格 (Schillinger)，他在 1941 年出版了 12 本名為 *Schillinger System of Music Composition* 的著作，藉由數學來發展科學上的(或合乎科學的)全新音樂本質。這個系統也被形容為一種在電腦出現以前的電腦音樂，在他的許多作品中，似乎也預知以演算式作曲的發展前景 (吳鼎武·瓦歷斯, 2003)。而隨著對數學與音樂關係之認識的不斷加深，以數學計算代替作曲，已成為現代作曲家的一種創作方式，其所創作之樂曲乃是將作曲的過程公式化，把音程、節奏、音色等素材都編成數碼，然後按照需求發出指令，以計算機的功能進行選擇，再將其結果編寫成樂曲並演奏出來，在在顯示出數學與音樂密不可分的關係 (童忠良, 1993)。

二、莫札特的音樂效應

西方近代音樂心理學的研究，於十九世紀中期展開，從人耳聽覺現象之探究出發，以聲波現象、人的嗓音發聲及雙耳聽覺之身

體參與、以及人對於聲音的感覺面向三方面，分別就聲音的物理學、生理學和心理學來探討人類對於聲音的反應和感受。在歷經一世紀後，許多有關音高、音強、音色、節奏、旋律等個別音樂結構要素，與人們身體以及心靈活動之間的相互關聯和影響的論文，皆陸續的發表其相關的研究成果 (Benzon, 2003)。

音樂所引起的特定振動，無疑的將導致身體的某些反應，而產生心理和生理上的效應，例如：蓋過令人不悅的聲音和感覺；平緩腦波的波動起伏；影響呼吸、心跳、脈搏、體溫和血壓；減少肌肉緊張和增進身體運動的協調；促進血液循環增強免疫系統；改變對時間和空間的認知；加強記憶力、想像力、創造力和學習能力；提高生產效率；舒緩鎮定、減輕壓力、紓解焦慮、培養耐性、製造歡愉和幫助消化；增強安全感和幸福感 (何權峰, 1998；Campbell, 1999；Mathieu, 1999；Benzon, 2003)。

最近幾年，所謂的音樂神效，不論是創造力、學習力、健康和治療方面，都廣受重視，特別是莫札特和他同時代音樂家們所創造的音樂。例如美國：讓特殊病人聽半個小時的古典音樂，其效果等同於十毫克的心臟病用藥；非英語系國家的新移民，在學習英文時播放莫札特和巴洛克音樂，可以增強學習效果。日本：在播放貝多芬第六號交響曲「田園」的室內發酵麵團，七十二小時後製成特殊的「貝多芬麵包」；莫札特音樂可以幫助酵母菌發酵，釀造出最好的日本清酒；加拿大：街道上播放莫札特的弦樂四重奏，可以安撫行人的情緒。法國：為所飼養的母牛播放莫札特音樂，可以生產更多的牛奶 (Campbell, 1999)。此外在救護車上播放古典

音樂可以安撫病患的情緒和減輕其痛苦；在產房內播放古典音樂可以紓解產婦緊張的心情，使生產更加順利。

莫札特音樂的神奇力量，一直到 1990 年代，因為加州大學爾文分校的「神經生物學學習和記憶中心 (Center for the Neurobiology of Learning and Memory)」，一個由 Rauscher 所領導的研究小組，觀察莫札特音樂對大學生和孩童們所造成影響之創新的研究報告，才開始獲得社會大眾的注意和重視(Rauscher, 1993, 1995)。緊接著科學家們開始研究莫札特的音樂效用，而所獲得的結論是：聽莫札特的音樂可以幫助大腦皮質中的神經元組織模式，特別是加強創造性右腦對空間及時間的理解能力(Gardner, 1993；Holden, 1994；Campbell, 1999)。意即聽莫札特的音樂就好比是一種促進協調系統和更高腦部功能的運動，可以加強注意力，增強直覺力(Leng, 1991；Campbell, 1999)。在莫札特的音樂世界裡，永遠有某種信仰，儼然已經成為生活的一部份，讓人感覺到自我的生

息和激發心中的愛(Mathieu, 1999)。

在這些研究成果發表之後，許多學校開始播放莫札特的音樂，作為學習時的背景音樂，據稱學生的注意力和學習表現都有改善。而臨床實驗結果亦證明莫札特的音樂，最能安撫聽者的情緒，提高其智商，增強其幾何與空間概念的思考能力，使其能清楚地表達自己，包括心靈和智力上的溝通。莫札特的音樂簡單而純粹，既不像巴哈喜歡創作繁複交織的音樂，也不像貝多芬喜歡製造令人蕩氣迴腸的音樂，更不像聖歌般的全然平淡、民謠音樂那樣令人放鬆身體、或搖滾音樂般讓人陷入情緒之中。莫札特音樂的節奏、旋律和高頻率，可以刺激和激發腦部的創造力和動機的區域，具有一種令人釋放且具治療效力的力量，故莫札特音樂所產生的效果較吟唱聖歌、民謠音樂或其他古典音樂來的好，尤其是莫札特的小提琴協奏曲，效果最佳(Campbell, 1999)。

伍、研究結果與討論

畢達哥拉斯及其學派，在數學領域中努力追求和諧與完美，使他們從正五邊形的邊長和對角線的比例中，發覺了黃金比例；而從正五邊形所獲得黃金比例的相關發現，推得畢氏學派的入派標誌正五角星，其所內接之正五邊形邊長與正五角星邊長，亦存在黃金比例的關係(童忠良, 1993；孫文先, 1996；Wheeler, 1994)。畢氏學派之所以會對黃金比例產生興趣，乃因希臘人認為真善美是一體的，而黃金比例中即包含了藝術的「美」、數學的「真」、和應用的「善」(洪建全教育

文化基金會, 1985)。

人們在探索自然美和藝術美的過程中，亦發現黃金數列的美無處不在。例如生物學家觀察某些植物的葉片、花瓣，從小到大的序列，就是以 0.618 的近似值排列(童忠良, 1993；翁瑞霖, 2004b)。此範例證明了自然界生物體內出現的數目，都會顯示出數學的規律，而此規律與黃金比例亦存在密切的關係。

由於黃金比例是如此的和諧，而令人賞心悅目，因此許多日常生活中的藝術構

思，經常會不自覺的來自這個比例。像古代的神廟，其高與闊是按黃金比例來建造；古埃及金字塔塔高對基底邊長的比例亦為黃金比例；古希臘時期藝術家所畫的人像，以及古代的雕塑像，其身段都是採用黃金比例(童忠良，1993；翁瑞霖，2004b；Wheeler, 1994)。此外，作為一種代表藝術文化產物的樂器鋼琴和小提琴，能夠長久存在，其造形設計也因遵循黃金比例，而有最完美無暇的呈現；也因為鋼琴和小提琴將精巧設計、視覺藝術和音質美感，最完美地結合在一起，故在歷史和藝術上，永遠都是令人著迷的樂器(翁瑞霖，2004a，2004b)。

而音樂所呈現的動聽旋律和美感，也正是這些音樂作品的曲式結構，經常都是採用了這個完美的數學比例。黃金比例應用在樂曲結構的著名範例為匈牙利名現代作曲家巴爾托克(Bartok)，於1937年開始編纂一套包括6冊153首樂曲的鋼琴曲集「小宇宙」，富含教育意義，極為獨特(Mine, 1999)。將此「小宇宙」全集依前述黃金分割法則加以計算後，其中大約有80%明確的顯示出這些作品之曲式結構，和黃金分割的規律有著密切的關係(童忠良，1993)。

依前述黃金分割法則，將小提琴學習過程中非常重要的鈴木小提琴教材全套共八冊，及篠崎小提琴教材全套共六冊，進行黃金段落分析後，發現其中之許多樂曲都存在黃金分割法則，尤其是舞曲類之樂曲，不論是嘉禾舞曲、小步舞曲、布雷舞曲、圓舞曲、庫朗特舞曲或其他舞曲，其樂曲之結構存在黃金段落法則的比例接近90%。此外，計算其他許多著名且已編纂成集的小提琴樂曲之後，確認其樂曲結構亦遵守黃金分割法則，包括韓德爾(Handel)的小提琴奏鳴曲集6首共24個樂章、貝多芬(Beethoven)的小提琴

奏鳴曲集10首共33個樂章、及韋瓦第(Vivaldi)的四季協奏曲集4首共12個樂章等，其重要段落有80%以上明確的顯示出這些作品之曲式結構，出現在全曲之黃金數0.618或近似0.618處，與黃金分割的規律有著密切的關係(翁瑞霖，2004a，2004c)。

前文曾提及莫札特的小提琴協奏曲，其音樂影響之效果最佳。莫札特，1756年1月17日出生於奧國薩爾斯堡，1791年12月5日逝世於維也納。從小便展露非凡的音樂才能，3歲學習鋼琴，5歲開始作曲，6歲起和家人開始了歐洲的大規模旅行演奏，造成前所未有的成功和轟動；於是天才兒童莫札特聲譽，響遍全歐洲。雖僅享年35歲，但一生所創作之音樂作品超過600首，包括41首交響曲、20齣歌劇、13首小夜曲、19首嬉遊曲、50餘首協奏曲及其他作品(邵義強，1992)。

莫札特除了有「音樂神童」和「樂神之子」的美稱之外，由於其協奏曲作品皆十分流暢、優雅和明麗，因此亦有人稱其為「協奏曲之王」。協奏曲的義大利字「Concerto」，源自拉丁語的「Concentus」和好之意，起初取用到音樂中，是當作獨立的各聲部在一起和諧地震鳴之意。在巴洛克時代，以「大協奏曲」為最重要的管絃樂形式，尤其是早期的作品，更為接近交響曲，獨奏樂器和管絃樂部是以相同的份量處理，而主體似乎都置於管絃樂部，獨奏樂器並未處於中心地位。一直到巴洛克時代後期1750年代以後，協奏曲由「大協奏曲」轉移到「獨奏協奏曲」，此時獨奏者不僅在旋律上或技巧上都有了獨立性，也掌握了主導權；而管絃樂部則淪為伴奏的角色。在協奏曲中十分重視裝飾奏(cadenza)，也是對獨奏者演奏技巧的憧憬和執著的表現(邵義強，1992)。

莫札特以其獨創的手法給予協奏曲之獨奏樂器豐富的裝飾奏和經過句，而管絃樂部則繼續進行交響化的主題演繹，並將典雅的主題織入獨奏者洗煉的技巧中。獨奏者與管絃樂部間巧妙的對比，把第二主題增加至兩個，使曲式更為擴大，為協奏曲帶來的新境界，而確立了今日協奏曲的特徵。在莫札特之後的協奏曲，只是或多或少地將莫札特所奠定的協奏曲曲式加以變化而已(邵義強，1992；King, 1997；Lang, 1997)。

莫札特最早的協奏曲創作始於 1767 年之時，而最後一首協奏曲則在逝世前 7 或 8 週完成；前後 25 年間共創作 50 餘首協奏曲，還留下約 6、7 首未完成的作品，而其中為鋼琴所作之協奏曲數量最多，在莫札特的創作生涯中佔有相當突出的地位(King, 1997)。

至於莫札特小提琴協奏曲的創作，一直有許多不同的說法，但是最為熟悉也最能確定為莫札特所作的小提琴協奏曲有 5 首，分別是第一號降 B 大調 K.207、第二號 D 大調

K.211、及本研究選定之第三號、四、五號作品。除了第一號作品創作於 1773 年外，其它 4 首均為莫札特在 1775 年 19 歲時的作品，樂曲風格具有濃厚的宮廷氣息，可說是當時宮廷音樂品味的反應；而其中第三、四和五號協奏曲為今日最常聽到及演奏的 3 首作品。莫札特在這些作品中，給予獨奏者充分發揮燦爛技巧的機會，洋溢著明快的曲風，能引人沉浸在無限美感中。這些音樂除反映莫札特家鄉的風土色彩外，也流露出莫札特到世界各地旅遊演出時的愉快回憶，例如第三、四號曲中留存著法國音樂，而第五號則有德國及土耳其音樂的餘韻(邵義強，1992)。

依前述黃金分割段落之說明，我們分析莫札特的這 3 首協奏曲，發現其樂曲結構也都明確地遵守黃金分割法則，顯示這些作品之曲式結構，與黃金分割的規律有著密切的關係，而呈現樂曲各部份之間的完美數學比例關係，如表一所示：

表一

曲目	第一樂章	第二樂章	第三樂章
第三號	$135/214 = 0.631$ (符合)	$27/42 = 0.643$ (符合)	$264/433 = 0.610$ (符合)
第四號	$125/212 = 0.590$ (符合)	$52/89 = 0.584$ (近似)	$154/239 = 0.644$ (符合)
第五號	$134/222 = 0.604$ (符合)	$85/125 = 0.680$ (近似)	$215/349 = 0.616$ (符合)

在計算莫札特音樂黃金分割點的同時，我們亦由表二所列此 3 首協奏曲各樂章

的升記號數目和調性之次序性，再一次證實莫札特音樂所呈現的完美形式。

表二

曲目	第一樂章	第二樂章	第三樂章
第三號升記號數目和調性	1 G 大調	2 D 大調	1 G 大調
第四號升記號數目和調性	2 D 大調	3 A 大調	2 D 大調
第五號升記號數目和調性	3 A 大調	4 E 大調	3 A 大調

從表二我們可以清楚看出，此 3 首樂曲之第一樂章與第三樂章均為相同的調性，此乃古典時期協奏曲的曲式要求。然而第二樂章之調性均一致的採完全五度遞增方式後，再回到原主調，即三號為 G→D→G、四號為 D→A→D、五號為 A→E→A，則非古典時期協奏曲的曲式要求；且同一樂章的升記號數目，依第三、四、五號分別呈現次序的數列，第一樂章是：1、2、3；第二樂章是：2、3、4；第三樂章又還原為：1、2、3，其調性之間亦均為完全五度的遞增：G→D→A；D→A→E；G→D→A，也都不是古典時期協奏曲的曲式要求，而是莫札特此 3 首樂曲所呈現之一致性和規律性。我們嚐試將上述升記號數目的次序，以重要的數學工具和概念之一的行列式表示如下：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

將此 3 X 3 之三階行列式展開並計算其值，則得到如下具有高度對稱性的展開式： $(1 \times 3 \times 3 + 2 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 1) - (1 \times 3 \times 3 + 2 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 1)$ ，以及令人讚嘆的完美答案 0。我們進一步檢視此行列式後發覺，其實任何 3 首調性符合古典時期協奏曲的曲式要求之協奏曲，將其升降記號數目以 3 X 3 之三階行列式表示時，其值一定是 0。因為依古典時期協奏曲的曲式要求，其第一和第三樂章的調性相同，所以其所形成之行列式，無論第二樂章的調性為何，一定至少有兩行或兩列是完全相等的；而依行列式之性質得知：行列式中有兩行相等或兩列相等時，則此行列式之值為 0。因此莫札特此三首協奏曲的調性，因為

符合古典時期協奏曲的曲式要求，使其 3 X 3 行列式之展開式具有高度之對稱性和完美的答案 0；此外，更因為此三曲樂章調性彼此間的完全五度關係，而使其 3 X 3 行列式呈現次序性和規律性的數字排列。

除了上述莫札特音樂中數學關係的探討之外，我們也選擇莫札特的第三、四和五號協奏曲的第一樂章為範例，分別進行以下樂曲結構的數學解析及段落主題敘述：

一、第三號協奏曲

第三號協奏曲完成於 1775 年 9 月，為莫札特小提琴協奏曲中，首次嶄露風格的成功之作，莫札特曾為此曲附加「史特拉斯堡協奏曲」的副題(邵義強，1992)。此曲的第一樂章為 1 個升記號之 G 大調樂章，拍號 4/4，演奏速度為 Allegro，曲式為奏鳴曲式。整個樂章共有 214 小節，包括：管絃樂前奏(以下簡稱前奏)第 1 ~ 37 小節共 37 小節；獨奏小提琴呈示部(以下簡稱呈示部)第 38 ~ 105 小節共 68 小節；獨奏小提琴展開部(以下簡稱展開部)第 106 ~ 155 小節共 50 小節；獨奏小提琴再現部(以下簡稱再現部)第 156 ~ 214 小節共 59 小節。

此樂章優美快活的第一主題，是摘自音樂劇〈牧羊人之王〉中的抒情調旋律，由管絃樂部的第一小提琴朗爽的演奏出來；隨後流暢的第二主題，是由雙簧管和法國號吹奏出；而後在雙簧管的引導之下，獨奏小提琴登場，隨即照原態將前面兩個主題依序呈示出來，曲調極為明麗。緊接著進入展開部後，由獨奏小提琴與雙簧管交替出現的旋律，使聆聽的人無不迴腸蕩氣。再現部的段落裏，獨奏小提琴將前述的兩個主題，照曲式忠實地復現出來(邵義強，1992；音樂之友社，1997)。

二、第四號協奏曲

第四號協奏曲完成於 1775 年 10 月，此曲因為洋溢著蓬勃的朝氣與生命力，故為一般人所喜愛(邵義強，1992)。此曲的第一樂章為 2 個升記號之 D 大調樂章，拍號 4/4，演奏速度為 Allegro，曲式為奏鳴曲式。整個樂章共有 212 小節，包括：前奏第 1 ~ 41 小節共 41 小節；呈示部第 42 ~ 114 小節共 73 小節；展開部第 115 ~ 145 小節共 31 小節；再現部第 146 ~ 212 小節共 67 小節。

這個壯大華麗的快板樂章，是由節奏活潑、曲調單純、具有進行曲風的第一主題開始，此首協奏曲的管絃樂部，雖未加入小喇叭，但是管絃樂部的演奏宛若由軍營的小號所吹奏，故有「軍隊協奏曲」之別稱。其後獨奏小提琴登場，先重述第一主題，隨後演奏出爛雅高貴的 second 主題，與第一主題恰成鮮明的對比。進入展開部後著重在誇耀獨奏小提琴的燦爛技巧。再現部中第一主題不再出現，而是以第二主題再現後，獨奏小提琴以一段華麗的演奏結尾(邵義強，1992；音樂之友社，1997)。

三、第五號協奏曲

第五號協奏曲是莫札特所有小提琴協奏曲中，最受人熱愛且最常演出的作品，完成於 1775 年 12 月。此曲不論是構思或規模，均較莫札特其他所有小提琴協奏曲為大，曲中因華麗豐富的旋律，如泉湧接連出現，令

人有應接不暇之感；而其中不僅有法國式洗煉的表現，還預示了濃厚的德國風色彩(邵義強，1992)。此曲的第一樂章為 3 個升記號之 A 大調樂章，拍號 4/4，演奏速度為 Allegro，曲式為奏鳴曲式。整個樂章共有 222 小節，包括：前奏第 1 ~ 39 小節共 39 小節；呈示部第 40 ~ 117 小節共 78 小節；展開部第 118 ~ 143 小節共 26 小節；再現部第 144 ~ 222 小節共 79 小節。

在這個樂章中，顯示出莫札特對新手法之嘗試，首先由管絃樂部呈式堂皇節奏風格的第一主題，隨後在曲調可愛優美的 second 主題後，於慢板的樂段中，獨奏小提琴奏出短小抒情的樂句，為一效果獨特的表現法。進入獨奏小提琴的呈示部時，第一主題好像是另一個新的旋律，那暢快的情調，具有無限的新鮮感和魔力；然而仔細聆聽管絃樂部的伴奏，其曲調即是最初呈示的第一主題。像這樣巧妙多姿但毫無不自然之感的音樂，只有莫札特才能創作出來。展開部裏變成小調，這時哀愁的情緒，伴隨著迷人的美感流瀉出來。再現部的段落裏，獨奏小提琴將前述的兩個主題，照曲式忠實地復現出來(邵義強，1992；音樂之友社，1997)。

上述莫札特第三、四和五號協奏曲的第一樂章之樂曲分析相關資料，彙整如表三所示：

表三

項次	第三號	第四號	第五號
升記號數目	1	2	3
調性	G 大調	D 大調	A 大調
拍號	4/4	4/4	4/4
速度	Allegro	Allegro	Allegro

曲式	奏鳴曲式	奏鳴曲式	奏鳴曲式
總小節數	214 小節	212 小節	222 小節
前奏小節數	第 1 ~ 37 小節 共 37 小節	第 1 ~ 41 小節 共 41 小節	第 1 ~ 39 小節 共 39 小節
呈示部小節數	第 38 ~ 105 小節 共 68 小節	第 42 ~ 114 小節 共 73 小節	第 40 ~ 117 小節 共 78 小節
展開部小節數	第 106 ~ 155 小節 共 50 小節	第 115 ~ 145 小節 共 31 小節	第 118 ~ 143 小節 共 26 小節
再現部小節數	第 156 ~ 214 小節 共 59 小節	第 146 ~ 212 小節 共 67 小節	第 144 ~ 222 小節 共 79 小節

從表三的數據，我們首先檢視前面所敘述關於莫札特 3 首小提琴協奏曲之第一樂章與黃金比例的關係。從各樂段的小節數，我

們可以算出其與全樂章小節數之比值範圍如表四所示：

表四

項次	第三號	第四號	第五號
前奏對全樂章之比值範圍	$1/214 \sim 37/214$ $= 0.005 \sim 0.173$	$1/212 \sim 41/212$ $= 0.005 \sim 0.193$	$1/222 \sim 39/222$ $= 0.005 \sim 0.176$
呈示部對全樂章之比值範圍	$38/214 \sim 105/214$ $= 0.178 \sim 0.491$	$42/212 \sim 114/212$ $= 0.198 \sim 0.538$	$40/222 \sim 117/222$ $= 0.170 \sim 0.527$
展開部對全樂章之比值範圍	$106/214 \sim 155/214$ $= 0.495 \sim 0.724$	$115/212 \sim 145/212$ $= 0.542 \sim 0.684$	$118/222 \sim 143/222$ $= 0.532 \sim 0.644$
再現部對全樂章之比值範圍	$156/214 \sim 214/214$ $= 0.729 \sim 1$	$146/212 \sim 212/212$ $= 0.689 \sim 1$	$144/222 \sim 222/222$ $= 0.649 \sim 1$

由表四可知其黃金分割段落均落在展開部之中。我們進一步分析此段落，發現此 3 首協奏曲第一樂章的展開部都存在兩個主題，此二主題結束之小節數分別是第三號：第一主題為第 135 小節，比值為 $135/214 = 0.631$ 、第二主題為第 155 小節，比值為 $155/214 = 0.724$ ；第四號：第一主題為第 125 小節，比值為 $125/212 = 0.590$ 、第二主題為第 145 小節，比值為 $145/212 = 0.684$ ；第五號：第一主題為第 134 小節，比值為 $134/222 = 0.604$ 、第二主題為第 143 小節，比值為

$143/222 = 0.644$ 。故其最接近黃金分割點 0.618 的段落，均為展開部的第一主題結束，即是我們在前面所敘述的，此三者之黃金分割點分別為第三號 $135/214 = 0.631$ ；第四號 $125/212 = 0.590$ ；第五號 $134/222 = 0.604$ 。

此外，從此三者之樂曲分析相關資料彙整表格中，我們可以清楚看出莫札特 3 首小提琴協奏曲之第一樂章，具有高度之一致性、對稱性、和諧性和規律性；除了拍號、演奏速度及曲式完全相同之外，樂章的總小節數也很相近(214、212、222)；而其調性更

以五度相生律的形式，由三號的 1 個升記號 G 大調、四號的 2 個升記號 D 大調、至五號的 3 個升記號 A 大調。再進一步分析其樂曲結構，則可以明確看出此三曲之第一樂章，均十分一致且規律的區分為下列 4 個主要段落，第一段落：管絃樂前奏，演奏第一和第二主題；第二段落：小提琴獨奏呈示部，照原態依序演奏第一和第二主題；第三段落：小提琴獨奏展開部，演奏新主題；第四段落：小提琴獨奏再現部，照原態依序再現第一和第二主題或只以第二主題再現。

此三曲第一樂章的再現部所演奏之主題，無論是第一或第二主題，與其呈示部的主題相似度非常高；意即再現部所演奏的主題，幾乎就是將呈示部主題的完全重複，或轉換成高四度或低五度方式交互呈現。今以第三號第一樂章為範例說明如下：

第 38 小節至 54 小節第 2 拍屬呈示部第一主題的樂段，與第 156 小節至 177 小節第 2 拍屬再現部第一主題的樂段完全一致；第 64 小節至 75 小節屬呈示部的樂段，與第 183 小節至 193 小節屬再現部的樂段，為高四度音程之轉換；第 76 小節至 82 小節屬呈示部

第二主題的樂段，與第 194 小節至 200 小節屬再現部第二主題的樂段，為低五度音程之轉換；第 83 小節至 94 小節屬呈示部的樂段，與第 201 小節至結束屬再現部的樂段，為高四度音程之轉換；而其他樂句，亦大都是以轉化為低五度或高四度音程之方式交錯呈現。

至於第四號和第五號第一樂章的樂曲結構，也是類似上述第三號的情形，都是以再現部的開頭樂句完全重複呈示部之主題，接著再轉換為交錯型態的高四度或低五度方式呈現；而呈示部與再現部最後的樂段，則如同第三號一般，均以轉換為高四度音程之方式結束該樂章。同時我們亦發現，呈示部和再現部段落小提琴獨奏之最後 2 小節，都很一致的以一個 4 拍的震音(含兩個裝飾音)和比其低一個全音的 1 拍尾音作結束；而且此最後 2 小節之小提琴拉奏弓法，一般均先以下弓拉 2 拍震音，再以上弓拉 2 拍震音(含兩個裝飾音)，最後再以下弓結束最後 1 拍之尾音。這種對稱性和規律性的結構，再一次呈現莫札特協奏曲美的形式，如表五所示：

表五

項次	第三號	第四號	第五號
呈示部小提琴獨奏最後 2 小節	2 拍震音 E 下弓→	2 拍震音 B 下弓→	2 拍震音 F 下弓→
	2 拍震音 E 上弓(含兩個裝飾音 D、E)→	2 拍震音 B 上弓(含兩個裝飾音 A、B)→	2 拍震音 F 上弓(含兩個裝飾音 E、F)→
	1 拍尾音 D 下弓	1 拍尾音 A 下弓	1 拍尾音 E 下弓
再現部小提琴獨奏最後 2 小節	2 拍震音 A 下弓→	2 拍震音 E 下弓→	2 拍震音 B 下弓→
	2 拍震音 A 上弓(含兩個裝飾音 G、A)→	2 拍震音 E 上弓(含兩個裝飾音 D、E)→	2 拍震音 B 上弓(含兩個裝飾音 A、B)→
	1 拍尾音 G 下弓	1 拍尾音 D 下弓	1 拍尾音 A 下弓

由於呈示部與再現部之樂句，具有極高之相似度，故對學習者而言，如果在學習該樂曲之初，即能作有系統的分析，使其了解樂曲的組織結構，則對其學習的成效，將會有十分顯著的助益。例如以小提琴的結構而言，其四條空弦由高至低分別是 E、A、D、G，弦與弦之間為五度音程的關係，故以低五度方式再現主題，對小提琴演奏者而言，其實就是從原主題該拉奏的琴弦，完全轉換至低的另一條弦，例如由 E 弦轉至 A 弦、A 弦轉至 D 弦或 D 弦轉至 G 弦，在技巧的教授、學習和解說上都比較清楚和容易。

最後，協奏曲之第一樂章在再現部結束後、樂章結束之前，習慣性都會插入一段裝飾奏，其題材以前述主題做為根基，有深度

而且華麗，但卻是自由而精心的發展傑作。在 1725 年至 1825 年間，裝飾奏習慣由獨奏者即席演出，1825 年以後則由作曲家或演奏家先做預備。裝飾奏是第一樂章的主題，經過獨奏者作技巧性的裝飾後，而完成的結局。因此常使用各種技巧，即興演奏已存在之素材，而無一定之形式，所著重的是在誇耀獨奏者的燦爛技巧；而協奏曲中對裝飾奏的重視，無疑是對獨奏者燦爛技巧的憧憬和執著的表現(劉志明，1992；邵義強，1992)。由於此三首莫札特協奏曲之裝飾奏，曾經由多人改編過，例如尤金·易沙意、約瑟夫·姚阿幸等，究竟是否合乎莫札特創作樂曲之理念，已不可考，故在本研究中並不探討其裝飾奏的部分。

陸、結語

整個天體就是一種和諧，而宇宙的和諧，則是按一定數字比例規則排列，所建立的秩序。這種唯美的宇宙觀，雖然沒有揭示出原本的物質真諦，卻對其後之科學美學和音樂美學的發展，產生了極深遠的影響。本文乃運用數學的演算，探討其在莫札特樂曲結構分析的應用，包括敘述音樂領域中數學的應用範例；莫札特的音樂效應；黃金比例在莫札特樂曲結構的應用；及敘述莫札特第三(G 大調)、四(D 大調)和五號(A 大調)協奏曲樂曲結構的數學解析等。藉由數學在音樂領域的應用，使我們證實莫札特音樂明確遵守黃金分割法則，而呈現了完美的數學比例關係；同時藉由數學運用分析其小提琴協奏

曲的樂曲結構，而展現了其創作之一致性、次序性、和諧性和規律性，也因此說明了為什麼莫札特音樂不論在創造力、學習力、健康和治療方面，都被證實能發揮其神奇的效應，而受到廣大的重視。同時也再一次證明了代表理性的數學，其規律、和諧與秩序所產生的美感，雖無聲音之傳遞，但與音樂是根本相連的；而代表感性的音樂，其音強、音高、音色、節奏、旋律、曲式及風格，雖無明顯之數字表達，但數學的蹤影處處可見，在在都顯示出數學與音樂密不可分的關係。期望藉由數學與音樂多元對話的探討，了解音樂中的數學關係，提供音樂的另類思考模式，以促進科技與人文的融合。

參考文獻

- 九章出版社編輯部 (1992)：科學家傳奇。台北：九章出版社。
- 吳鼎武·瓦歷斯 (2003)：碎形音樂。科學月刊, 34(11), 959-963。
- 何權峰 (1998)：音樂魔法書。台北：迪茂國際出版公司。
- 邵義強編著 (1992)：協奏曲欣賞。台北：全音樂譜出版社。
- 林珍如、夏荷立譯(2000)。Campbell, D.著：莫札特效應——音樂身心靈療法。台北：先覺出版社。
- 林靜枝、丁佳甯譯(1999)。Mine, H.著：偉大作曲家群像——巴爾托克。台北：智庫份有限公司。
- 林勝儀譯 (1997)。音樂之友社編：古典名曲欣賞導聆(3)協奏曲。台北：美樂出版社。
- 洪建全教育文化基金會編 (1985)：不朽的科學家(數學)。台北：洪建全教育文化基金會。
- 高士彥譯(1997)。Lang, P. H.編：協奏曲 1800—1900(上)。台北：世界文化出版社。
- 翁瑞霖、許維楨 (2002)：由琴弦的振動看數學與音樂的對話。科學月刊, 33(8), 708-713。
- 翁瑞霖、邱智藻 (2003)：音樂看得到。科學月刊, 34(4), 950-954。
- 翁瑞霖 (2004a)：探討黃金比例在小提琴設計和樂曲結構之應用，審稿中。
- 翁瑞霖 (2004b)：黃金數的傳奇。科學月刊, 35(4), 306-311。
- 翁瑞霖 (2004c)：數學與音樂的對話—探討音樂中的數學應用，審稿中。
- 國明譯(1997)：King, A. H.著。莫札特管絃與弦樂協奏曲。台北：世界文化出版社。
- 陳相如譯(2002)：Isacoff, S.著。平均律。台北：藍鯨出版社。
- 張嚶嚶譯(1999)：Storr, A.著。音樂與心靈。台北：知英出版社。
- 孫文先編譯 (1996)：神秘有趣的數學。台北：九章出版社。
- 曾志華 (2000)：開啓數學與音樂的對話(上、下)。翰林文教雜誌, 16, 57-68。
- 葉李華譯(1997)：Stewart, I.著。大自然的數學遊戲。台北：天下文化出版社。
- 黃嘉彥、張如梅 (2000)：科學與音樂的對話。科學月刊, 31(6), 518-527。
- 童忠良、王忠人、王斌清 (1993)：音樂與數學。北京：人民音樂出版社。
- 歐陽絳 (1996)：數學的藝術。台北：九章出版社。
- 劉志明 (1997)：曲式學。台北：全音樂譜出版社。
- 蔣勳 (1996)：藝術概論。台北：東華書局。
- 蔡聰明 (1994)：音樂與數學—從弦內之音到弦外之音。數學傳稿, 18(1), 78-96。
- 蔡聰明 (2001)：數學的發現趣談。台北：三民書局。
- 蔡逸萍譯(1999)：Mathieu, W. A.著。音樂生活。台北：新路出版社。
- 趙三賢譯(2003)：Benzon, W.著。腦內交響曲。台北：商周出版社。
- Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences: The theory in practice*. New York: Basic Books.
- Holden, C. (1994). Smart music. *Science*, 266, 968-969.
- Leng, X., & Shaw, G. L. (1991). Toward a neural theory of higher brain function using music as a window. *Concepts in Neuroscience*, 2, 229-258.

Rauscher, F. H., Shaw, G. L., & Ky, K. N. (1993).
Music and spatial task performance. *Nature*, 365,
611.

Rauscher, F. H., Shaw, G. L., & Ky, K. N. (1995).
Listening to Mozart enhances spatial-temporal
reasoning: Towards a neurophysiological basis.
Neuroscience Letters, 185, 44-47.

Wheeler, R. E., & Wheeler, E.R. (1994). *Modern
Mathematics(9th ed.)*. Pacific Grove:
Brooks/Cole.

作者簡介

翁瑞霖，輔英科技大學應用化學系副教授

Jui-Lin Ong is an Associate Professor in the
Department of Applied Chemistry at Fooyin
University.

e-mail:dtc@mail.fy.edu.tw

投稿日期：92年11月11日

修正日期：93年04月09日

接受日期：93年04月26日

The Dialogue between Mathematics and Music: the Mathematical Analysis of Mozart's Music and its Effect on the Listener

Jui-Lin Ong

Department of Applied Chemistry, Fooyin University

Abstract

The roots of mathematics are closely connected with those of music. The rational structure or system of mathematics is implicitly aesthetic, given its properties of order and harmony; in this sense it is musical, even though there is no transmission of sound. By the same token, music—even though in it there are no explicit digits or other mathematical signs—is implicitly mathematical in and through its amplitude, frequency, quality, rhythm, melody, form and style. The present investigation sets out to describe Mozart's music mathematically. This structural analysis of the music and its effects on the listener therefore includes: examples of the application of mathematics to music, the measurement of the effects of Mozart's music, the application of the golden ratio to Mozart's musical structure, and an analysis of the application of mathematics to the musical structure of Mozart concertos: specifically the first movements of No. 3 (G major), 4 (D major) and 5 (A major). These analyses strongly suggest the close correlation between mathematics and music. This study thus aims to promote the integration of technology and the humanities by opening a dialogue between music and mathematics.

Key words: mathematics; music; golden ratio; Mozart; concerto