教育科學研究期刊　第五十八卷第一期
2013 年，58（1），59-90
doi:10.3966/2073753X2013035801003

國小六年級學生運用一般化基模進行圖形規律問題解題之研究

陳嘉皇
國立臺中教育大學
數學教育學系

摘要

本研究旨在探索學生對圖形規律問題一般化歷程產出的基模，以掌握學生一般化認知結構，理解其一般化運作情形；並探討學生一般化歷程基模的轉換，建構一般化解題模式，以提升代數思考教學的成效。研究樣本為小學 3 名六年級學生，參與研究者設計之三十二項圖形規律問題，並從學生對作業的操作與訪談蒐集資料，資料分析與說明則採質性方法呈現。綜合研究發現，獲得以下三階段結果：學生在發想階段利用「整體圖形關係」和「部分結構要素」概念基模計畫解題，在連結階段則運用「圖形特徵與圖次比對」與「物件計數與圖次比對」概念基模進行圖形與圖次關係的連結，在歸納階段採用「單位組合」與「圖形結構」概念基模，協助其進行解題。在一般化歷程上，也利用「加法」、「乘法」與「實用」等運算基模協助整合規則或算式。學生因圖形結構的性質與一般化解題經驗與知識，讓其在一般化歷程上產生基模與解題策略的改變與轉換，使其朝向更精細代數思考心智模式的運用與圖形整體結構關係之整合。以一般化基模運作與發展作為基礎，可建構出「利用圖形結構」與「利用數字序列」兩種一般化解題模式。研究者根據發現結果提出學生解題模式與建議，提供未來代數思考教學與研究參考。

關鍵字：一般化、代數思考、基模、圖形規律問題

通訊作者：陳嘉皇，E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw
收稿日期：2012/05/06；修正日期：2012/11/11、2012/12/09；接受日期：2013/01/30。

壹、緒論

Silver（1997）認為學習代數對日後數學的影響非常重大，因為它扮演著學生將來能否獲取更高學位的守門員角色。為協助學生在數學上有成功表現的機會，小學階段就應讓學生盡早接觸代數的觀念，而「代數思考」（algebraically thinking）就是最佳的內涵。為提升代數概念的理解，教育部（2003）頒布之「國民中小學九年一貫課程綱要」六年級數學能力指標代數部分，即宣稱學生應具備「使用未知數符號，將具體情境中的問題列成算式題，嘗試解題及驗算其解」，在教學總體目標裡則寄望學生在小學畢業前能利用常用的數量關係，解決日常生活的問題；為強調解題能力的培養，則建議可利用數學內部的連結貫穿數與量、代數、幾何等主題內涵，並由數學外部連結以強化生活及其他領域中數學問題的察覺、解題、溝通等能力，要求學生能分解複雜的問題為一系列的子題，選擇使用合適的數學表徵，熟悉像觀察、臆測、推演、驗證等歷程，運用歸納、演繹、推理、一般化、模型化等解題方法。透過九年一貫課程綱要能力指標之詮釋，可知要培養小學生代數思考的能力，那麼認識變數、運用算式呈現問題關係，尋找樣式一般化並進行論證與解說，應是數學課程與教學強化的重點。當學生能夠辨識問題中變數的關係，並能利用算式呈現問題結構以協助其推理和解題，那麼對未來進入國中或高中有關方程式、函數或更高深之數學概念的學習將更容易。因此，瞭解與促進小學生數學一般化的學習，將有助於填補算術轉換至代數思考之間的間隙（Kaput, 1999; Rivera, 2010）。

探索小學生如何理解和運用一般化具有兩項意義，一是呼應認知發展有關數學概念轉換的研究：學生理解與運用一般化，對於發展不同數學知識之間的交互作用提供一項重要的媒介。不同類型的數學知識常出現於學生的思考而轉換，例如小學教科書出現的問題：某百貨公司週年慶商品打七折出售，那麼先打折後再計 5%的稅比較便宜？還是先計 5%的稅後再打折較便宜？師生可以原價 1,000 元為例，經兩種方法$(1{,}000\times70\%)\times1.05=735$ 與$(1{,}000\times1.05)\times70\%=735$ 比較後，發現結果一樣，然後一般化予以轉換，以 x 表示任何原價，結果仍然相等：$(x\times70\%)\times1.05=(x\times1.05)\times70\%$；也可把打折幅度一般化，稅率也一般化得到$(x\times y)\times z=(x\times z)\times y$，此一般化的歷程學生除得到計算的技巧解決生活問題外，尚且獲得數學交換律的概念。二是對數學教學的啟發：可說明數學教學實務現場一些潛在的議題。以上述百貨公司商品打折問題為例，一般化產出的困難包含學生推理思考與解題策略之表現、問題樣式、定義特徵和解題方法，與學生在教室互動產出客觀化知識和意義所運用的訊號及步驟。

運用一般化呈現數學概念進而解題是代數思考的核心，雖然九年一貫課程綱要強調代數思考的重要性，小六數學課本也編列相關單元內容（例如數量關係、怎樣解題）以教導代數思考，然而，學生學習一般化有其困難所在，這牽涉到學生認知、教材特性與學習方法。為

提升一般化學習成效，Becker 與 Rivera（2005）提出建議，認為小學階段可運用圖形表徵促進學生一般化的學習，因為圖形的樣式能有效導引學生洞悉代數規則，經觀察相關要素後，可理解圖形問題中變數的特質與其結構關係（吳昭容、徐千惠，2010；馬秀蘭，2008；陳嘉皇，2006，2007；Mason, 1996; Moss, Beatty, McNab, & Eisenband, 2006）。

另外，決定與運用合宜的策略以提升學生一般化的理解亦非常重要，其目的在於促進數學概念、事實、習慣與步驟之間的連結與轉換。但如何建立一般化歷程重要概念與解題習慣的連結？一些學者認為可採取基模建構理論加以探討（Gick & Holyoake, 1980; Mayer, 1991）。基模的發展與轉換是透過學生對具有結構型態的問題、定義特徵與所需相似解題方法概念化的歷程，若有較廣泛的基模可應用，那麼學生會有較多的機會辨識新奇的問題，理解何時可運用學習過的策略解題。所以透過圖形規律問題與有效策略的教導，應可協助學生組織情境中變數的共通性，洞察某數量與另一數量如何建構關係，推理形成算式，增進解題效率並鞏固數學概念。然而，學生進行圖形樣式一般化時，會發展何種類型的基模？學生會採取何種基模協助進行辨認、擴展和一般化？何種基模包含圖形樣式一般化的本質？這些問題若能解決並系統化地說明，可提供實施一般化教學的參考依據，具深入探討的價值。本研究欲達成的目的如下：

一、探索國小學生對圖形規律問題一般化歷程產出的基模，掌握學生一般化認知結構，理解一般化運作情形。

二、明瞭學生一般化歷程基模轉換情形，建構一般化解題模式，以提升代數思考教學的成效。

貳、文獻探討

一、一般化定義與發展

何謂一般化？Dreyfus（1991）將其定義為是辨認範例的共通性（commonalities），對特殊範例進行推知（derive）或化約（induce），將正確歸納的結果擴展到更多案例的歷程。Polya（1957）將則一般化定義為是對單一物件逐漸發展到對一組物件的思考，對觀察的物件做類比、檢測而理解其關係的活動。解析 Dreyfus 與 Polya 一般化的定義，可知一般化的歷程是個體對物件特性加以觀察、連結以產生合宜規則，進而利用此規則解題與應用的歷程。因此，小學階段的數學一般化教學，應協助學生從特殊的範例去發展歸納的能力，鼓勵其採用有意義與正確的方法表達一般化。有效的一般化關聯以下問題：（一）何種特質的作業才可協助學生進行一般化？（二）在解題線索有限的範例中，何種連結歷程可促進學生發展一般化？（三）學生連結及歸納的一般化的能力如何？需具備何種基模才能進行擴展與解題？

對於何種作業才能進行一般化？Shipley（1993）主張應具備下列特質：（一）組合：可

從作業線索中導出公式，即便線索不完整仍可提供合理的項目，採取一些彼此組合的方法而促進一般化，這些具相似特質的線索並非事先存在，但可藉由學生的知識與經驗加以組合；（二）外推：透過可檢測的形式，將外推的步驟投射到個別的要素上，進行臆測和擴展。由於樣式結構的產生是種主觀與建構的活動，學生須明白如何利用知覺與符號組合物件並有效推論，才能說明樣式的結構而應用到未知的階段。Rivera（2010）長期研究學生對圖形樣式一般化產出的認知表現，認為有意義的一般化活動需包含兩項行動：（一）對圖形物件進行發想和歸納（abductive and inductive action on objects），包含使用不同的計數與分離樣式中部分物件等相關方法；（二）符號化（symbolic action），包含對一般化形式的轉換，例如用算式呈現問題結構的關係。Rivera 進一步描繪學生對圖形樣式一般化行動的歷程，如圖 1 所示。

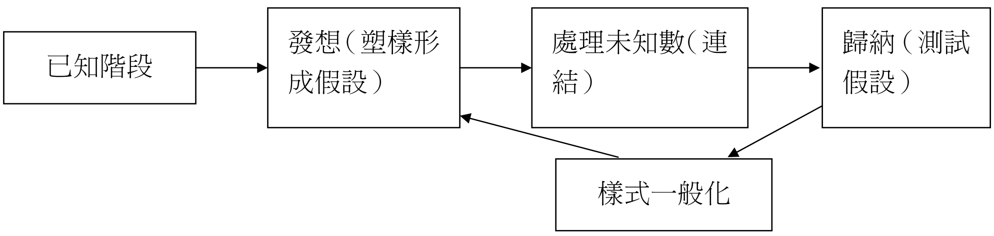


圖1.　一般化塑樣與假設之行動歷程。引自“Visual templates in pattern generalization activity,” by F. D. Rivera, 2010, *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), pp. 297-328. doi:10.1007/s10649-009-9222-0。

Rivera（2010）認為，發想階段是圖形樣式一般化塑樣與假設歷程的核心，學生面對問題時，會根據知覺判斷啟用計畫解題的基模，決定採用何種合理可行的策略嘗試解題。例如，學生面對一變化的圖形中的黑點，如 1（第 1 項次）、1＋2（第 2 項次）、1＋2＋3（第 3 項次）……要求此圖形第 10 個項次時黑點總和是多少？他可採取將所有數字逐一加總的方式，計畫算出第 10 項次黑點的總和，也可採用兩兩數字配對的方式先將 1＋10、2＋9……等簡化步驟後再加總算出答案，要運用何種基模計畫解題，視學生面對問題時其先備經驗與知識的提取應用。當學生面對不完整線索的圖形範例探索規則時，也須能利用已知階段存有之基模臆測與推演問題結構中變數的發展，思考如何連結圖形中相關變數的關係，如此才可建構未知階段。以上述案例來說，學生發現在第 1 項次時只有數字 1、第 2 項次時則變化成 1＋2、第 3 項次時則變化成 1＋2＋3，從這樣的變化歷程發現數列的變化與項次有所關聯，進而推演出樣式變化的規則，即第幾 N 個項次，其數列的樣式應為 1＋2＋3＋⋯＋N，N 也代表項次；學生能針對所給予之不同範例，像要求算出第 50 項次或第 100 項次之黑點總和為多少？他可以以假設的算式呈現問題結構的關係，例如用(50×51)÷2、(100×101)÷2 或(1＋50)×50÷2、(1＋100)×100÷2 提供解釋性的假設，然後用來擴展及檢測樣式與其結構的變化，即為歸納階段。當規則確信後，可引導學生進一步處理更複雜的作業。Rivera 認為發想階段是學生圖形樣

式一般化成敗的關鍵，因為在此階段，學生會藉由觀察並配合心智結構中之基模，辨識、組織相關物件成一合宜假設，經由推理歸納形成一結構關係，進而利用此關係解題。然而，學生如何銜接發想至歸納階段進行一般化？這在教學上牽涉兩項問題，一是如何引發學生注意圖形中相關的物件，另一則是如何協助其提取心智模式中有關的基模，激發其組織樣式規則的建立。

如何引導學生注意圖形有關的物件？Lobato、Ellis 與 Munõz（2003）認為在一般化初始階段，須鼓勵學生「聚焦」或「注意」問題中一個可能的變數特質或關係。Mason、Graham 與 Johnston-Wilder（2005）則主張需能「緊握」一個共通性或規則，「注意」或「變得知覺」與一般化強調的有關行動，即「緊密的注意」細節，特別是一些改變或相同的觀點，掌握這些要點後，才能引導隨後的概念。另外，Duval（2006）指出，學生對圖形的認知不僅是知覺的反應，尚且包含論述的歷程。知覺的理解只是把圖形看成是單一、完整的物件，像看見桌子的底部或頂端而知覺是四邊形。論述的理解是將圖形視為由幾個要素組成具有顯著結構的整體物件，例如，由許多長短不同的線段要素判斷組合的四邊形像正方形、矩形等。Duval 主張學生在論述過程強調的要素不同，像是物件大小、長短、排列方向、垂直或平行等幾何特徵，會影響其對圖形產出不同的樣式、步驟和解題策略，所以協助學生辨認圖形中物件的變異性和規則是最基本的活動。Rivera、Knott 與 Evitts（2007）為使學生在一般化產出聚焦的行動，提出一般化作業之指引，其歷程為：

（一）描述你看到了什麼。

（二）此圖形的規律如何發展？

（三）從某一圖形至次一圖形時，什麼物件會改變，什麼還會保持一樣？

（四）從某一圖形至次一圖形，保持一樣的變數是什麼？將它呈現出來。

（五）第一個圖形到第二個圖形有多少物件的數量增加？第二個圖形到第三個圖形有多少物件的數量增加？第四個圖形有多少物件的數量增加？

（六）圖形的序號與增加的物件數量之間有何關係？

（七）第二個圖形有多少物件的數量增加？可否採用乘法或其他有別於加法的方式表示呈現出來？

（八）如果 P 代表圖形的序號、S 表示物件的總數量，利用算式呈現出 P 和 S 的關係，並解釋公式所代表之圖形的意義。

此指引步驟（一）與（二）在於促進發想階段的行動或說明，目的是協助學生透過視覺而計畫解題的想法；步驟（三）至（七）則企圖引導學生在連結階段洞察圖形之變數與圖次之間的關係，建立合乎邏輯思考的規則；步驟（七）與（八）則要求學生在歸納階段採取符號或算式呈現問題的結構關係，並進行解題。此指引可作為圖形一般化學習與教導的法則，但要檢驗學生如何進行一般化，仍須檢測一般化歷程所運用的基模是否有效，才能完整掌握

學生心智表現。因此，本研究嘗試利用國小數學課程常見之圖形樣式問題，探索小六學生在一般化歷程如何與應用基模進行解題。

二、圖形樣式一般化基模之探討

一般化的另一議題是如何激發學生提取基模？與運用何種基模進行解題？數學解題歷程的研究對於學生概念如何轉換和連結，包括基模的建構，已經產出一些解釋（陳嘉皇，2011；陳慧姿，2009；陳麗華，1988；Cheng & Holyoak, 1985; English & Halford, 1995）。何謂基模？Marshall（1995）將它描述成是種人類記憶的機制，可儲存、綜合、歸納及提取經驗，基模讓個體組織相似的經驗，進而協助辨識額外的經驗。Piaget（1977）運用基模的觀念當成科學研究的基礎，主張個體基模的發展可透過目標導向的概念而連結，當個體與物理環境交互作用時，概念不僅被當成可觀察的行為，且可當成心智活動，緊密的與個體的經驗相連結。

基模具備多元的屬性，指的是一組群聚的知識，包含概念性與程序性知識、這些知識之間的關係，及如何與何時運用這些知識等資訊。當知識進行串連（chunk）時，基模會引導新資訊的同化作用，將新資訊與既存的知識進行整合，儲存後，將來處在新情境時可以感覺並加以運用。因此，以基模的觀點來看，獲得與先前基模相連結的數學概念、原理與步驟，會反過來為將來的探索活動提供知識的基礎，這些知識的連結與重組可產生更新且有力的基模結構。Seel、Ifenthaler 與 Pirnay-Dummer（2009）主張認同作用依賴基模的可用性與活化產生，如果基模無法適應新作業的需要，可透過添加（accretion）、定調（tuning）或重組（reorganization）等機制加以調整。以此問題為例，有 5 列花片，分別是 16、17、18、19、20 個，總共有多少花片？學生列出算式 16＋17＋18＋19＋20＝？後，可將數列中各數字皆變成 20，即分別添加了 4、3、2、1、0，然後採取 20×5－(4＋3＋2＋1＋0)的方式算出總和，此策略為添加機制的應用；定調的機制則將 16 視為此數列的基礎，17、18、19、20 比 16 此基礎數字分別多了 1、2、3、4，要計算此數列總和可將定調的 16×5 後，再加上 1、2、3、4；為使計算方便，學生亦可透過視覺比較方式，將 20 個花片移動 2 個給予 16 個花片、19 個花片移動 1 個給 17 個花片，形成每列都是 18 個花片，將 16＋17＋18＋19＋20 此算式重組成 18×5＝90。Jonassen（2000）研究發現，當基模可適用於相似類型的問題時，那麼就可解決相配對的問題，如果認同無法成功，為辨識或重構某種個別的知識，那麼調適就會發生。亦即如無適用的基模或重組失敗時，人類的心智就會自動轉換至特別的心智結構，透過簡化和想像情境的類比連結，將目標置於主體認為合理的事物上。

在數學領域上，基模已成為代數知識研究與模式化知識過程一項重要的理論工具。Chinnappan 和 Thomas（2003）認為在擴展代數知識上，學生若能成功發展變數的基模，就可擴展到等式或函數的概念。他們發現兩項重要的代數基模：組織（organisation）與擴展（spread）。組織是指建立概念之間的連結，而擴展則是一些概念連結後所能觸及的範圍。當

代數的基模具備高程度的組織與多元應用的方向時，學生就會呈現出聰慧與解決複雜問題的特質。Rivera（2010）研究學生洞察樣式的差異，知覺圖形要素的單位，經由物件抽離的層次與所包含關係的複雜性，提出七種加法與乘法為主之一般化基模。加法基模僅需一抽離的層次或包容的關係，透過物件重複的累加而執行，例如，2 名學生進行高度的比較，可使用公分此單位之加法基模比較誰高誰低。乘法的基模則需同時建立多個包容關係的抽離層次，是種更為複雜的運算，建立在加法思考能力上，使用多元思考、較高法則的運算，例如，在「小華的錢數是小明的五倍」此問題中，除應用「元」此單位外，尚且需具備「倍」之乘法基模的知識。這些加法與乘法的基模可總結如 Chinnappan 和 Thomas 所謂的組織基模，即對圖形中相關的要素予以組合，形成規則後協助進行解題的知識。

因為在一般化發想階段，要素的選擇對未來建構的規則或算式扮演重要的角色，學生是否能有效解題，則依賴其思考採行之加法或乘法基模知識能否對整個樣式結構、有關的變數或其關係加以說明。根據 Sophian（2007）的看法，當學生計數圖形樣式裡任何可辨識的要素時，會依據要素是否具一致性的特質而進行單位的選擇和組合。在一般化教學的歷程，協助學生洞察與建構要素中的單位，並與符號和推論的算式之間進行關聯是主要的目的，要讓學生能夠從算術思考之單位知覺、運算基模轉換至代數思考有關算式產出，在圖形設計上須呈現樣式的明確性，才能激發學生知覺、審視與組織圖形的要素成為合宜的單位，進而促使關聯或明確化圖形的規則或算式。當圖形具高度樣式規律，像是物件的排列具平衡投射或整體結構的說明時，可引導學生利用既有基模組織整合樣式規則，進而擴展基模應用範圍，產出明確化、有用的算式；而具低度樣式律則的圖形，其結構說明是混亂且複雜，無法辨識可組合或分離的要素，就會使認知結構中的基模無法提取，而使算式的建構產生困難，致使基模無法擴展甚至有效解題。

另外，根據 Rivera（2010）的觀察，雖然學生常使用加法與乘法基模進行一般化，但也會發展去圖形結構的概念，他們洞察圖形樣式中一些要素重疊的部分，利用移動、重組等基模，轉換這些部分要素成為熟悉之結構或可辨識的圖形，以方便解題。這項發現與 Seel 等（2009）的主張一致：當舊有基模無法適應新作業的要求時，可透過添加、定調或重組等機制加以調整。另外，Rivera 也發現學生亦會針對問題情境的特徵，同時組合加法與乘法基模進行解題，此類型基模稱為實用基模。

Rivera（2010）的研究提出學生在圖形樣式一般化塑樣與假設之行動歷程之概念，提供對學生如何進行發想、連結與歸納等議題良好之說明，瞭解基模知識對於學生圖形樣式一般化學習扮演的角色，也為解開學生圖形一般化歷程有關視覺化和建構符號與算式之間關係的研究奠定根基，開拓新的探索領域。Rivera 認為圖形樣式一般化的發展，起始於對圖形要素組成單位的發想階段，進而影響問題結構規則的推理和建構，若在此過程能連結與擴展有效的基模結構，將可協助學生呈現圖形關係之算式。根據上述文獻提及，基模不僅包含程序性知識，

尚且包含概念性知識與這些知識之間的關係，基本上，Rivera 提出之加法與乘法基模，是觀察學生於圖形樣式一般化作業發想階段所得，偏重於運算基模之產出與轉換，其研究仍欠缺概念基模的分析。本研究除採用 Rivera 的運算基模作為分析的要素外，擬擴展 Rivera 的研究基礎，納入概念基模。根據陳嘉皇（2006，2007）對學生進行圖形一般化解題的研究發現，在運用算則解題之前，學生會先有一解題的順序圖像，作為引導其解題策略和運算方式的引導，稱之為概念基模，是學生於一般化歷程對呈現的作業，思索如何將圖形結構與如何計畫解題之間關係的解釋，例如看見一十字架圖形，欲求由多少黑點組成，可思索採用中心部分的數量加上相同之四條突軸的數量解題。學生從發想階段單位的形成至歸納階段解題會產生何種概念與運算基模類型？基模隨著一般化各階段的進展如何轉換改變？這些議題皆為本研究所欲探討理解的。

參、研究設計與步驟

為順利進行並蒐集學生一般化基模之相關資料，研究者擬訂研究架構（如圖 2）作為研究進程的依據。

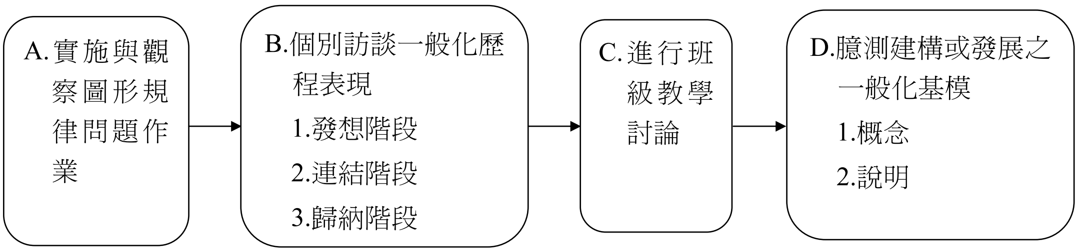


圖2.　本研究架構

本研究為期 8 週，每週進行 2 小時教學（週二與週四各 1 小時，於晨間活動實施），學生總計需解決 32 道圖形規律問題。首先於每週的第 1 節課要求學生針對呈現的 4 道問題寫出解題方法、解釋和一般化，研究者與教師則巡視和觀察學生的作業，適時地給予回饋或提問問題（A）；之後則選取標的樣本（3 名）進行訪談，探索學生解題策略、基模運用及代數思考的發展（B）。每週第 2 小時則進行解題說明，學生討論其對作業問題的觀察、解釋及一般化、顯示符號算式，彼此傾聽策略與解題方法並加以比較，評估是否需保持或改變其擬訂的方法（C）。當師生進行教學討論時，研究者觀察、傾聽，記錄學生的說明與解題策略。最後階段則為資料分析，研究者觀察基模知識是否習得與運用操作的歷程，嘗試理解學生對解題的說明與概念的分析，引導出研究的結果（D）。

一、研究對象

研究樣本來自於臺灣南部某國小六年級一班學生 33 位（18 位男生、15 位女生）。該校位於文教區，家長大多為公務員與教師，重視學生學業成就表現，課後約有三分之二學生參與補習活動，以提升數學表現與解題能力。該班導師（李師）大學畢業，專長為語文教育，教學年資 24 年，經驗豐富、認真負責。她採用問題思考法進行數學教學，常要求學生對解題方式加以表達與分享。李師在本研究擔任教學者，針對作業活動、有關學生思考與策略反應，進行解釋與說明，其與學生教學互動之內容則作為本研究探討與分析的依據。Steffe 和 Thompson（2000）認為：洞察學生完整、正確的作業表現，嘗試理解其數學問題背後的說明與行動，是教學研究一項重要的基礎。良好的基模具有強烈的連結與關係，可成功地運用類化到特殊的問題情境，並跨越問題進行類推。所以觀察學生一般化歷程正確的基模表現可獲得重要的概念分析，且是教學實驗朝向研究的力量。基於此觀點，本研究蒐集與分析基模資料的樣本，主要選取作業與訪談表現良好的 3 位標的樣本（S1 為女生、S2 和 S3 為男生），選取這些樣本，在於他們熱愛數學學習，數學成就表現中上（六上成績分別為班上 1、3、4 名），對於提供之作業內容皆能正確解題，在解題策略與心智模式概念呈現一致與穩定性，訪談時能具體清晰地說明解題的方式與理由，讓研究者明瞭其一般化的說明與行動，可作為研究者進行分析與解釋基模運作和發展的對象。

二、圖形規律問題設計

研究者針對文獻探討提及提升一般化學習的要點，進行樣式作業的設計，以激發學生利用視覺化辨識問題變數的發展，進而歸納問題結構的規則。作業總計 32 題，隨機分配到 8 週課程進行操作與教學討論。圖 3 呈現本研究所欲分析之 4 道問題（分別為例題 7、15、24、28，以圖形 A、B、C、D 等序號表示），其中圖形 A 與 D 為具二次函數特徵的圖形（圖形 A 轉換數字為 1、3、6、10），即各圖形的公差呈現逐漸遞增的現象；圖形 B 與 C 為具一次函數特徵的圖形（圖形 B 轉換數字為 8、12、16、20），即各圖形之間的變化具等差的性質。選擇此 4 道問題之理由，一方面配合 Rivera（2010）提出之一般化概念模式發想、連結與歸納各階段發展所需基模知識，以能引導學生建構與發展出明確的一般化基模，並利用解題；另一方面，此 4 道問題分別於不同時段呈現，可推估與理解學生一般化概念時其基模知識的建構、轉換和擴展情形。各作業具備之特徵與題型如下：

（一）單位結構化（structural unit）：將圖形或數字序列中重複出現相同規則特質的物件予以單位化，並以此單位結構說明問題的變化。

（二）圖次間變項的組合（stage-driven grouping）：將數學物件變化的規則（公差）與圖次序號結合成有意義的關係，並能對此關係的建立加以臆測和連結。

（三）發展樣式結構的規則（pattern rule）：整合圖形序列問題中各變數的關係，利用表

圖形A　小黑點的擴展

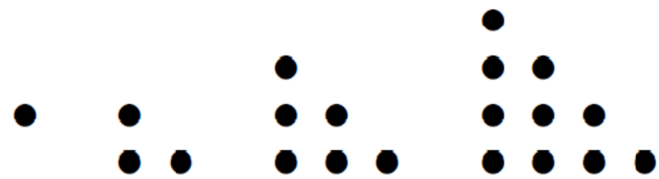


圖1　圖2　圖3　圖4

上面每個圖是由小黑點構成，觀察後回答下列問題：

(1)依照這種方式變化，在第5個圖時，黑點的數目共有幾個？答：(　　) 個

(2)依照這種方式變化，在第10個圖時，黑點的數目共有幾個？答：(　　) 個

(3)黑點的數目是78個時，應該是在第幾個圖？答：第（　　）個圖

(4)第P個圖時，黑點數目是105個，P的答案是第幾個圖？答：第（　　）個

(5)第30個圖時，黑點的數目是S個，S的答案是幾個？答：(　　) 個

(6)如果是第P個圖時，黑點的數目是S個，想一想，用一個算式表示S和P的關係。

圖形B　相框有多大

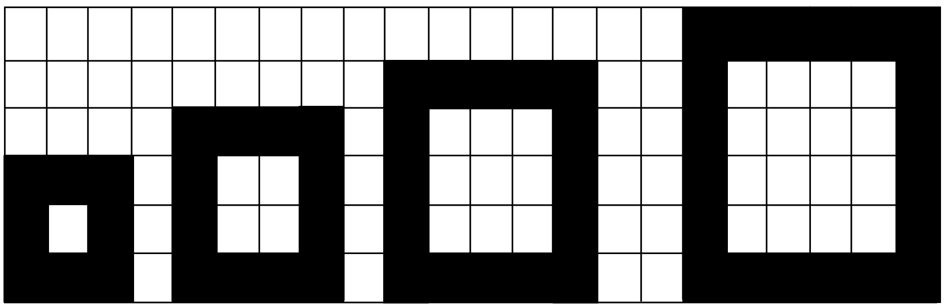


圖1　圖2　圖3　圖4

上面每個圖是由黑色的方塊構成，觀察後回答下列問題：

(1)依照這種方式變化，在第5個圖時，黑色方塊的數目共有幾個？答：(　　) 個

(2)依照這種方式變化，在第10個圖時，黑色方塊的數目共有幾個？答：(　　) 個

(3)黑色方塊的數目是84個時，應該是在第幾個圖？答：第（　　）個圖

(4)第P個圖時，黑色方塊數目是124個，P的答案是第幾個圖？答：第（　　）個

(5)第50個圖時，黑色方塊的數目是S個，S的答案是幾個？答：(　　) 個

(6)如果是第P個圖時，黑色方塊的數目是S個，想一想，用一個算式表示S和P的關係。

（續）

圖3.　本研究教學活動設計之圖形規律問題（續）

圖形C　十字架

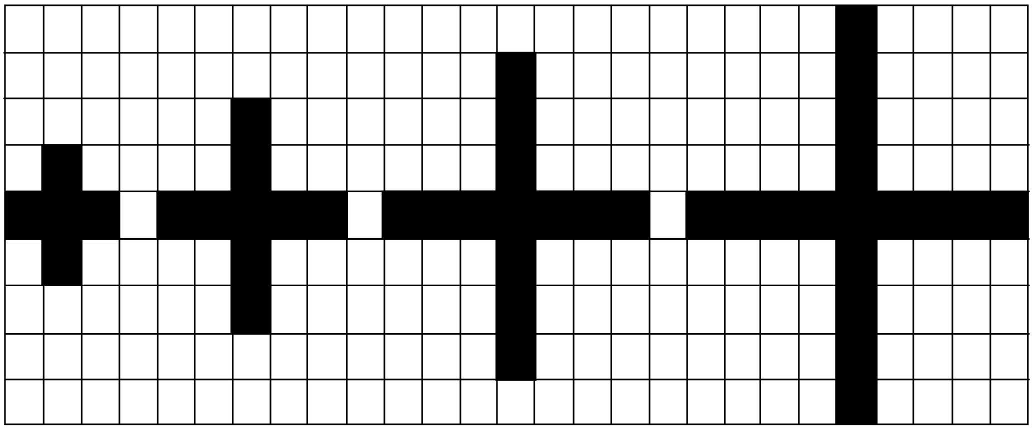


圖1　圖2　圖3　圖4

上面每個圖中的十字架是由黑色的方塊構成，觀察後回答下列問題：

(1)依照這種方式變化，在第5個圖時，黑色方塊的數目共有幾個？答：(　) 個

(2)依照這種方式變化，在第10個圖時，黑色方塊的數目共有幾個？答：(　) 個

(3)黑色方塊的數目是101個時，應該是在第幾個圖？答：第（　 ）個圖

(4)第P個圖時，黑色方塊數目是121個，P的答案是第幾個圖？答：第（　 ）個

(5)第50個圖時，黑色方塊的數目是S個，S的答案是幾個？答：(　) 個

(6)如果是第P個圖時，黑色方塊的數目是S個，想一想，用一個算式表示S和P的關係。

圖形D　小尖山的成長

圖1　圖2　圖3　圖4

上面每個圖是由小黑點構成，觀察後回答下列問題：

(1)依照這種方式變化，在第5個圖時，黑點的數目共有幾個？答：(　) 個

(2)依照這種方式變化，在第10個圖時，黑點的數目共有幾個？答：(　) 個

(3)黑點的數目是169個時，應該是在第幾個圖？答：第（　 ）個圖

(4)第P個圖時，黑點數目是324個，P的答案是第幾個圖？答：第（　 ）個

(5)第50個圖時，黑點的數目是S個，S的答案是幾個？答：(　) 個

(6)如果是第P個圖時，黑點的數目是S個，想一想，用一個算式表示S和P的關係。

圖3.　本研究教學活動設計之圖形規律問題（續）

列式或數學符號呈現問題的結構。

（四）知識或概念的效果：將建立的規則或公理加以檢驗，並擴展、應用至其他數學情境進行解題。

三、資料蒐集與分析

為理解學生一般化歷程發想、連結和歸納的進展，基模知識需能夠在作業或教學歷程被檢驗出來。從認知歷程加以分析，有關一般化的概念，是開始於一種描述思考路徑與相關聯知識狀態的說明，透過協商的方式，以發展或應用合適的基模而被活化。從學生一般化歷程表現探索基模的建置，可瞭解連續或重複測量之認知結構，應較只有測量教學前、後的反應更有效果，因此，學生一般化歷程產生的概念或運算的基模可作為分析的要素，運用概念與運算的行動與說明除可辨識學生建構一般化的基模之外，也可協助教師和研究者對一般化基模知識進行探究和討論。

訪談資料為本研究主要分析部分，其他輔以學生作業及教學互動對話。根據學生訪談的內容，逐步對一般化表現和說明予以轉譯、整理、分析、歸類，形成基模類型與研究結果。研究者將受試者訪談的資料進行 4 碼轉譯，首先呈現日期時間，其次為阿拉伯數字代表受試者的編號（1、2、3）；再者，大寫英文字母表示各圖形作業（A、B、C、D），最後，括弧小寫英文字母表示一般化作業包含發想（d）、連結（r）與歸納（g）等階段。例如【2009.09.03-3A（d）】代表 2009 年 9 月 3 日 3 號同學，在圖形問題 A 發想階段（d）的反應說明；【2009.09.24-2C（g）】代表 2009 年 9 月 24 日 2 號同學，在圖形問題 C 歸納階段（g）的反應說明。

為使研究具良好之信度與效度，在信度上採用兩種策略：（一）資料的真實性：對資料的呈現盡量以訪談紀錄及師生互動原始紀錄為依據，詳實轉譯成逐字稿；（二）與研究人員討論修正：研究者於研究過程中與 3 位教師進行討論修正，以避免主觀偏見。效度的提升則採取：（一）研究人員之三角檢定：研究過程中及資料蒐集後之轉譯分析，研究者與其他成員持續針對資料進行分析討論，以提供研究者不同面向之思考，減低研究者疏失及主觀偏見，並取得共識。例如：針對 S3 圖形 C 連結階段資料的分析，對於十字架中方塊的數量採 N＋N＋N＋N 再加上中間一個的方式計數，很明顯的可歸納為運用「物件計數與圖次比對」基模，但運算基模的分析，則有成員將 N＋N＋N＋N 再加上中間一個的方式類推為 N×4＋1，認為學生在概念上已轉換成實用基模，實際上審視學生是採用點數方式運算，所以將之歸類為運用「加法基模」；（二）資料來源的三角校正：研究者運用回溯法獲得之轉譯稿資料、錄影（音）、學生作業表現進行交叉比較與檢驗。目的希冀能運用豐富及多元之資料檢驗學生一般化的表現。

四、實施步驟

本研究參考文獻，編製相關圖形樣式問題，經過討論、修正之後，於 2009 年 9 月至 2010 年 2 月期間實施。作業期間鼓勵學生利用各種表徵，像是語言文字、表格、圖形或符號等協

助思考或記錄，作業活動結束則進行標的學生的訪談，訪談內容為作業的反應說明，每位學生訪談時間為 15 至 20 分鐘。研究期間相關活動皆予以錄影（音），俟研究結束，即整理相關資料進行分類、統計，繕寫結果。

肆、結果與討論

有關學生在一般化發想、連結與歸納等階段產出基模的行動與說明如下。

一、發想階段之概念與運算基模分析

分析訪談內容與作業表現，發現 3 位學生在發想階段即利用兩項概念基模：「整體圖形關係」（relationship of whole figure）和「部分結構要素」（elements of part structure）基模計畫解題。前者係指學生計畫將所面對的圖形問題以一整體完形的圖形結構解題，此圖形具有典型幾何圖形的特質；後者則是計畫將圖形中的物件予以分解成幾個相似特質的部分，再進行解題。

（一）利用「整體圖形關係」基模進行發想

利用「整體圖形關係」基模進行發想，可以 S1 的行動說明加以解釋。S1 經觀察圖形的變化後，發現圖形具有某種幾何特性，像是正方形、三角形，因此利用這些幾何圖形當成解題的線索，認為運用這些圖形的面積公式計算就可解題。以下為 S1 對其發想的描述：

R：針對圖形 A，你看到什麼？你會計畫怎麼解決這道問題？

S1：我覺得很像直角三角形（指著圖 A），這裡是他的底和高，底有 4 個黑點，高有 4 個黑底，利用三角形面積的公式能算出有幾個黑點！兩個三角形合起來是長方形，長方形除以 2 就是三角形。

R：你說的三角形和長方形……，我不是很清楚……，可以再說一遍嗎？

S1：（指著圖形 A 之圖 3），它是三角形，在這裡畫上跟它一樣的三角形（圖 4.1），合起來是個長方形，長方形面積是三角形的 2 倍，除 2 是三角形的面積。

R：為什麼你要用這個方法？

S1：2 個三角形可以組成一個長方形，用長方形除以 2 就算出答案了。【2009.09.22-1A（d）】

對於之後的作業，S1 也應用整體圖形關係的基模進行發想，他觀察圖形 B 的變化後說：「這個圖是一個正方形，裡面包含另一個正方形」（圖 4(b)），只要將整個正方形減去裡面的正方形，就可得到黑色方格的數目。對於圖形 C 的問題，他觀察後將此「十字架」的圖形看成

一個大的正方形，扣除圖形角落 4 個相同的小正方形，就可獲得答案，其概念與說明如下：

R：這是你在圖 C 問題的解題方法（圖 4(c)），說說看你的理由！

S1：這是十字架，這 4 個都是正方形，十字架整個範圍是一個大正方形，大正方形減去這 4 個小正方形，就得到黑色方格的數目。

S1：因為正方形的面積可以用邊長×邊長算出答案，這 4 個小正方形都一樣，只要算出每個邊長有多少，就可以算了。【2009.10.27-1C（d）】

S1 利用整體圖形關係基模作為計畫解題的發想，也明確地呈現在圖形 D 問題上，他觀察圖形 D 的變化後，將圖形 D 中的部分圖形予以切割轉移至原圖形另一端而形成正方形（圖 4(d)）進行解題：

R：你說可以用正方形解題，說說看你的理由！

S1：（指著圖形 D 問題中的圖 3）將這些黑點移到這裡是一個正方形！用正方形面積公式，邊長×邊長就可以算出有多少個黑點。【2009.11.03-1D（d）】

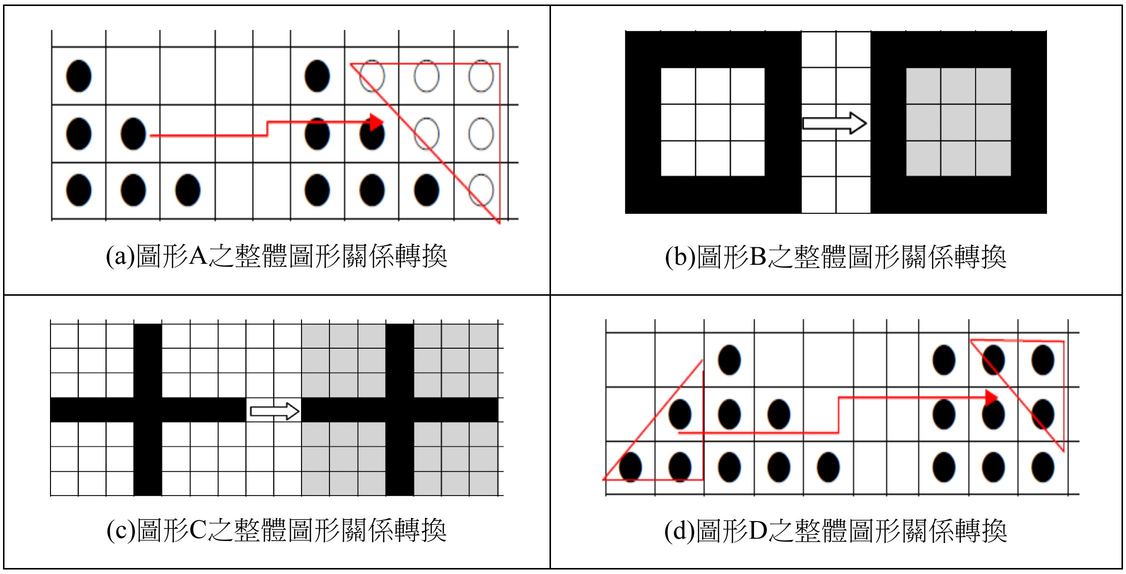


圖4. S1利用整體圖形關係基模進行一般化發想

從上述說明可知，S1 觀察圖形後，以完形的幾何圖形作為一般化發想的基礎引導其產出解題步驟。此種「整體圖形關係」基模結合 S1 先前數學學習的經驗，即藉由學過的圖形面積公式，像是正方形或三角形，利用建構該面積公式有關之要素像是邊長、底或高進行思考與運算。

（二）利用「部分結構要素」基模進行發想

S2、S3 則採取「部分結構要素」基模，洞察圖形中的特殊物件要素後，將這些物件予以分割、抽離，然後將具有相似特質的物件組織，採取分部方式進行解題計畫。對圖形 A 他們採取一列一列加總的方式計算圖形黑點的數目，進行圖形 B 作業時，「部分結構要素」基模的運用非常明顯，他們行動與說明如下：

R：對於圖形 B 的問題，你看到什麼？你計畫怎麼解決這問題？

S2：我覺得它的外圍像一個框框，這個框框有 4 個角，每個角都有 1 個黑色的方塊（圖 5(a)），只要將這 4 個加起來，然後再加上這 4 邊的方塊，這 4 邊都一樣，就能算出框框的方格。【2009.10.06-2B（d）】

S3：這個圖形上下兩邊的數目一樣，左右兩邊的數目也一樣，我先將上下的方塊加起來，再將左右兩邊的方塊加起來（圖 5(b)），再把這兩個加起來。【2009.10.06-3B（d）】

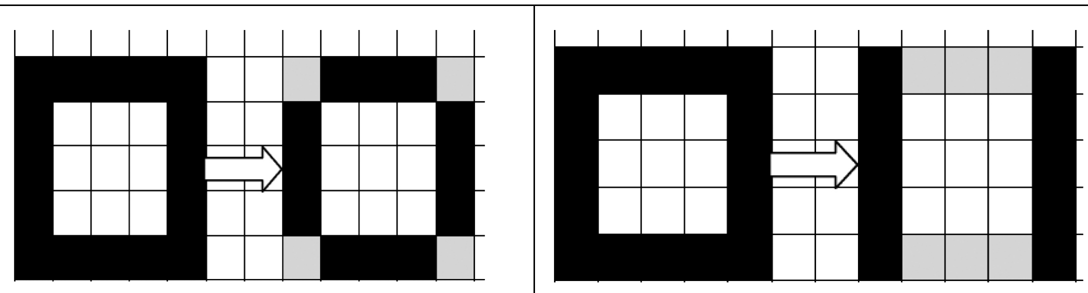
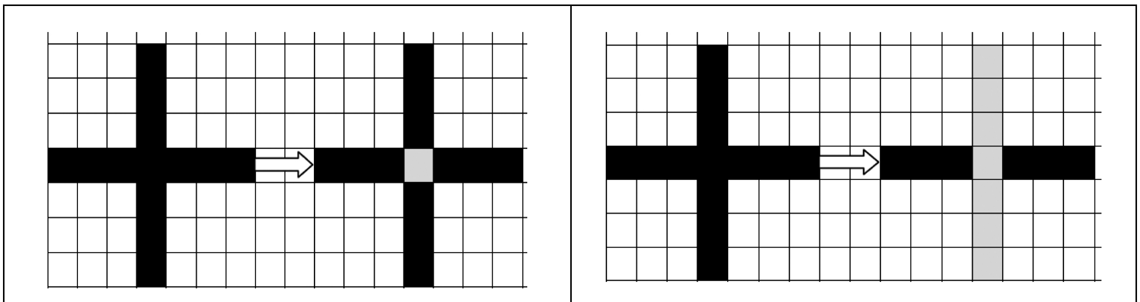

(a)圖形B之部分結構要素轉換　(b)圖形B之部分結構要素轉換

圖5.　S2與S3對圖形B之一般化發想

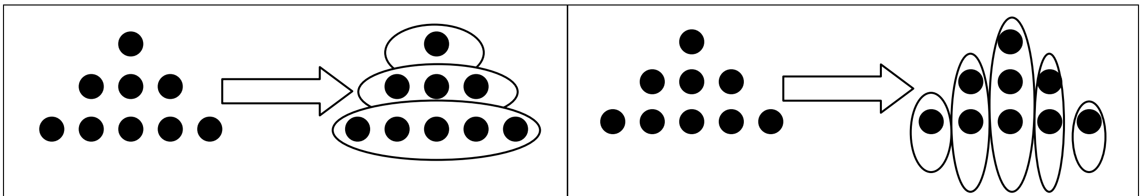
很明顯的，S2 與 S3 觀察圖形的發展後，發現圖形 B 的結構中某些物件具有相似之特徵，像是圖形 B 中的 4 個角都有 1 個方格，圖形上下、左右全等，利用這些圖形結構裡部分物件要素的組合，協助其進行解題步驟的發想。對於圖 C 的問題，S2 和 S3 亦利用部分結構要素的基模進行發想，S2 發現圖形 C 中每一個圖形的四個邊都具有同時延伸擴展的特質，且每邊的數量都一樣，因此採取四個邊加上中間個數的方式解題（圖 6(a)）；S3 則利用圖形左右兩邊的物件數量對稱相等的特性，計畫將兩邊的物件先行加總，然後再加上圖形中心軸的數量，即可解題（圖 6(b)）。針對圖形 D 問題解題的發想，S2 計畫採取由上至下（圖 7(a)）的方式將此圖形的物件予以分割成幾個部分，再將各列的物件逐一加總，以得出此圖形的黑點數目；S3 採取由左至右分割的方式（圖 7(b)），計劃將圖形分成幾個部分的物件然後予以加總，以得

出圖形中黑點數目。



(a)圖形C之部分結構要素轉換　(b)圖形C之部分結構要素轉換

圖6.　S2與S3對圖形C之一般化發想



(a)圖形D之部分結構要素轉換　(b)圖形D之部分結構要素轉換

圖7.　S2與S3對圖形D之一般化發想

從一般化發想階段所呈現的行動與說明，明瞭學生一般化採取的基模型態與下列因素有著密切的關聯：1.學生的先備經驗與知識（如 S1 對圖形 A 和 B 採用圖形面積公式做解題策略）；2.圖形的結構特徵（如 S3 在圖形 C 的發想）；3.圖形要素的變化趨勢（如 S2 對圖形 D 的發想）。這些因素除決定發想階段應用的基模外，亦影響學生進一步思索採取何種有效的行動進行解題。針對學生發想階段解題步驟的說明，將其運算基模整合如表 1 所示。

表 1

學生在發想階段之運算基模

圖形問題 / 學生代號	圖形A	圖形B	圖形C	圖形D
S1（女）	乘法基模	實用基模	實用基模	乘法基模
S2（男）	加法基模	加法基模	實用基模	加法基模
S3（男）	加法基模	加法基模	加法基模	加法基模

表 1 呈現 S1 在圖形 A 與 D 的運算採用「乘法基模」協助計畫如何解決問題，所謂的乘法基模是配合情境中圖形關係的發展，採取要素相乘的計算方式獲得答案。例如正方形的面積利用邊長×邊長的公式即可算出圖形所需的點數；S1 開始發想時，圖 A 與 D 的問題對其而言，並未與正方形面積公式解題的經驗與知識符應，因此進行如 Jonassen（2000）之基模的調適，運用「平移」、「旋轉」和「填補」等行動，將原先的圖形重構成一可協助其解決問題的圖形；針對圖 C，S2 發現圖形中所分割的部分物件數量，具有相似且「全等」的要素，因此將這些物件整合成具「單位」的物件，運用乘法（有四個一樣的觸角）結合加法方式（圖形中心皆有 1 方塊）進行運算，此種概念稱為「實用基模」；另外，S3 針對圖形 D 的問題，將圖形物件予以分割，計劃運用各部分物件逐一加總運算進行解題，此種稱為「加法基模」。

從上述行動與說明可知，學生能運用多元複雜的基模協助其計畫解題，如 Lobato 等（2003）指出的這些學生能「聚焦」、或「注意」圖形問題中一個可能的變數特質或關係，或 Mason 等（2005）主張的能「緊握」一個共通性或規則。另外，學生亦呈現 Duval（2006）主張的知覺和論述的認知能力，或 Chinnappan 和 Thomas（2003）所言的「組織」代數基模，其中包含兩項發想的概念基模類型：「整體圖形關係」和「部分結構要素」的基模；也從學生解題說明中，歸納出他們針對問題情境會採用「乘法」、「實用」與「加法」等具運算的基模。另為了建構完形之幾何圖形或具有可「單位化」的物件，學生在調適的行動上，亦利用「分割」、「平移」、「旋轉」、「填補」與「全等」輔助基模協助發想的進行。

二、連結階段之概念與運算基模分析

3 位學生在一般化連結階段產出之基模，可歸納成「圖形特徵與圖次比對」與「物件計數與圖次比對」兩種概念基模，協助其連結圖形與圖次之間的關係。前者是以完形幾何圖形有關的物件，例如邊長、底或高的數量作為基礎，與發展的圖次號碼做比對進行連結，思考其間的關係而產出規則；後者則將圖形中的物件計數轉換成數字，透過各圖形物件數字的變化與圖次的號碼連結形成關係。學生之行動說明如下：

（一）S1 連結階段基模分析

S1 主要採取「圖形特徵與圖次比對」概念基模（表 2）協助其思考如何建構圖形與圖次之間的關係：

R：請你說說看這些圖形和它的圖次號碼有什麼關係！

S1：這個圖（指圖形 A 圖 2）底是 3，高是 2；（指圖 3）底是 4，高是 3；（指圖 4）底是 5，高是 4；每一個圖都比前一個圖的底和高都增加二，第二個圖高是 2……，第四個圖高是 4，我想第幾個圖的高和圖的號碼是一樣的，第六個圖他的高是 6。【2009.09.22-1A（r）】

表2

S1在連結階段之概念基模分析

圖次 \ 問題 圖形	A （N, R, T）	B （N, R, T）	C （N, R, T）	D （N, R, T）
1	（1, 1, 1）	（1, 3×3－1, 8）	（1, 3×3－1×4, 5）	（1, 1, 1）
2	（2, 2×3÷2, 3）	（2, 4×4－2×2, 12）	（2, 5×5－2×2 ×4, 9）	（2, 2×2, 4）
3	（3, 3×4÷2, 6）	（3, 5×5－3×3, 16）	（3, 7×7－3×3 ×4, 13）	（3, 3×3, 9）
4	（4, 4×5÷2, 10）	（4, 6×6－4×4, 20）	（4, 9×9－4×4 ×4, 17）	（4, 4×4, 16）

註：（N, R, T）中 N 為圖次號碼，R 為連結紀錄方式，T 為圖形中物件數量。

S1：（指圖形 B）我的想法是第一個圖中間有一個正方形，外面的邊是 1＋2＝3；第三個圖中間的正方形每邊是三個，外面的是 3＋2＝5，第四個圖形中間的正方形每邊是四個，外面每邊是 4＋2＝6。裡面的正方形每邊的數目和第幾個圖的號碼是相同的，像第三個圖，裡面的正方形每邊是三個，第四個圖裡面的正方形每邊是 4 個。【2009.10.06-1B（r）】

S1：圖形四個角落都有一樣的正方形（指圖型 C 之圖 4 角落之正方形）這些正方形每邊是四個方塊，我想接下去第五個圖，每個正方形每邊會有五個方塊。【2009.10.27-1C（r）】

S1：把這個部分移到這邊變成正方形的圖形（圖形 D），第二個圖正方形每邊有二個黑點；第三個圖正方形每邊有三個；第四個圖是四個。【2009.11.03-1D（r）】

S1 循著先前發想階段的整體圖形關係基模，尋找與正（長）方形面積公式有關的圖形物件，發現圖形中正（長）方形中的邊長物件的數量與圖次的號碼有所符應，藉由「圖形特徵與圖次比對」基模的運用，推演圖形中邊長、底或高物件的數量與圖次號碼的關係，建立一符應的規則。

（二）S2 連結階段基模分析

S2 針對問題情境的理解，分別利用「物件計數與圖次比對」基模（圖形 A 與 D）與「圖形特徵與圖次比對」基模（圖形 B 與 C），協助其進行連結（表 3）。其行動說明如下：

表 3

S2 在連結階段之概念基模分析

圖形問題 / 圖次	A（N, R, T）	B（N, R, T）	C（N, R, T）	D（N, R, T）
1	（1, 1, 1）	（1, 1×4+4, 8）	（1, 1×4+1, 5）	（1, 1, 1）
2	（2, 1+2, 3）	（2, 2×4+4, 12）	（2, 2×4+1 , 9）	（2, 1+3, 4）
3	（3, 1+2+3, 6）	（3, 3×4+4, 16）	（3, 3×4+1, 13）	（3, 1+3+5, 9）
4	（4, 1+2+3+4, 10）	（4, 4×4+4, 20）	（4, 4×4+1, 17）	（4, 1+3+5+7, 16）

註：（N, R, T）中 N 為圖次號碼，R 為連結紀錄方式，T 為圖形中物件數量。

S2：圖形 A 中第一個圖有一個黑點；第二個圖增加二個，所以是 1+2；第三個圖比第二個圖增加三個，是 1+2+3；第四個圖比第三個圖再增加四個，是 1+2+3+4，我想第五個圖應該是 1+2+3+4+5，第幾個圖會比前一個圖增加幾個。【2009.09.22-2A（r）】

S2：（指著圖形 B），第一個圖中間白色的方塊一個；第二個圖裡面的正方形每邊是二個方塊；第三個圖裡面的正方形每邊是三個方塊；第四個圖是四個，裡面的正方形邊長和第幾個圖的號碼是一樣的。【2009.10.06-2B（r）】

S2：第一個圖十字架四邊都是一個，第二個圖十字架四邊都是二個，第三個圖十字架四邊都是三個，第四個圖十字架四邊都是四個，每一個圖的號碼和十字架每邊的方塊一樣，將圖形的號碼×4 再加上中間一個就行了。【2009.10.27-2C（r）】

S2：（指著圖形 D）第一個圖只有一列，第二個圖有二列，1+3；第三個圖有三列，1+3+5；第四個圖有四列，1+3+5+7，第五個圖會有五列，應該是 1+3+5+7+9。【2009.11.03-2D（r）】

S2 在連結階段所運用的基模，明顯的受到圖形特徵的影響，由於圖形 A 與 D 為具二次函數特徵的圖形，各圖形的公差呈現逐次遞增的現象，無法將相同特質的物件予以組合進行單位化，因此利用「物件計數與圖次比對」基模將物件予以分割，轉換成數量嘗試加總運算，在轉換的過程中，比對發現某圖形中加總的最後數量（例如圖 A 之圖 3 是 1+2+3）與圖次的號碼有所關聯，因此思考建立其間的規則並擴展推演至其他的問題；針對圖形 B 與 C 等一次函數特徵的圖形，則透過「圖形特徵與圖次比對」基模的運用，發現圖 B 裡面的正方形邊長數目與圖次的號碼有所關聯；圖 C 十字架中四個邊的方塊數目與圖次的號碼也一樣，因此，可將此兩物件組合連結出具特殊關係的規則，並擴展此規則進行解題。

（三）S3 連結階段基模分析

S3 在連結階段之圖形 A 和 D 所運用之基模與 S2 相似，採取「物件計數與圖次比對」基模進行規則的建構，但在圖形 B 和 C 則與 S2 有所差異（表 4），S2 採取「圖形特徵與圖次比對」基模進行圖形與圖次號碼的連結，S3 則利用「物件計數與圖次比對」基模進行連結，其行動說明如下：

S3：左右兩邊的方塊都會比中間這一邊的多 2（指圖形 B），第一個圖左邊是 1＋2，右邊也是 1＋2，再加上上下都是一個，第二個圖左右都是（2＋2），上下是二個；第三個圖左右都是（3＋2）個，上下是三個；第四個圖左右都是（4＋2）個，上下是四個。第五個圖我知道左右應該是（5＋2）個，上下都是五個。【2009.10.06-3B（r）】

S3：第一個圖每邊都有一個方塊（圖形 C），1＋1＋1＋1 再加上中間一個；第二個圖每邊變成二個方塊，2＋2＋2＋2 再加上中間一個；第三個圖每邊變成三個方塊，3＋3＋3＋3 再加上中間一個；第四個圖每邊變成四個方塊，4＋4＋4＋4 再加上中間一個。【2009.10.27-3C（r）】

表 4

S3 在連結階段之概念基模分析

圖形問題 / 圖次	A（N, R, T）	B（N, R, T）	C（N, R, T）	D（N, R, T）
1	（1, 1, 1）	（1, (1＋2)＋(1＋2)＋2, 8）	（1, 1＋1＋1＋1＋1, 5）	（1, 1, 1）
2	（2, 1＋2, 3）	（2, (2＋2)＋(2＋2)＋4, 12）	（2, 2＋2＋2＋2＋1, 9）	（2, 1＋3, 4）
3	（3, 1＋2＋3, 6）	（3, (3＋2)＋(3＋2)＋6, 16）	（3, 3＋3＋3＋3＋1, 13）	（3, 1＋3＋5, 9）
4	（4, 1＋2＋3＋4, 10）	（4, (4＋2)＋(4＋2)＋8, 20）	（4, 4＋4＋4＋4＋1, 17）	（4, 1＋3＋5＋7, 16）

註：（N, R, T）中 N 為圖次號碼，R 為連結紀錄方式，T 為圖形中物件數量。

S3 雖藉由一般化發想階段之「部分結構要素」基模，將圖形中的物件予以分割，嘗試對圖形與圖次號碼建立關聯，然而，尚未發現這些物件可採取利用「單位」方式運算的特質，因此採用物件計數的方式進行解題，而在加總計數的歷程，比對發現圖形各邊長的物件或增加的物件數目與圖次的號碼有所關聯，可以此關係作為基礎加以連結。

分析 3 位學生在一般化連結階段運用的運算基模，發現學生仍延續發想階段的運算基模進行解題，除 S2 於圖 B 改變成實用基模，其餘並無重大改變（如表 5 所示）。S2 於圖 B 連結階段改變運算基模，在於發現分割的物件中某些物件具有相同的特質，可將之組合形成單位，利用乘法基模予以計數，並結合圖形發展中固定之物件數目成為實用基模進行運算。

表 5

3 位學生在連結階段之運算基模

圖形問題 學生代號	A	B	C	D
S1	乘法基模	實用基模	實用基模	乘法基模
S2	加法基模	實用基模	實用基模	加法基模
S3	加法基模	加法基模	加法基模	加法基模

三、歸納階段之概念與運算基模分析

有關 3 位學生歸納階段作業呈現的算式，以求出圖次 10 的答案為例，將其結果歸納如表 6 所示。以圖 A 來說，S1 從發想階段至歸納階段皆採用整體圖形關係基模計畫解題，以圖形面積公式作為解題基礎；S2 和 S3 在發想階段以部分結構要素基模計畫解題，將物件數量採取分割方式計數，但至歸納階段則轉換成面積概念解題（運用高斯定理）。針對圖形 B 與 C 而言，此時 3 位學生皆發現圖形具有相同特徵之「單位」物件與固定值，將其組合可作為解題的規則；在圖形 D 方面，S1 透過「平移」、「旋轉」和「填補」等基模協助建構完形圖形後，採取正方形面積公式 p×p 解題，S2 與 S3 則利用數列之總和與圖次號碼的關係（1＋3＋5＋7＝16），應用先前學過之梯形面積（上底＋下底）×高÷2 公式解題。

表 6

學生在歸納階段呈現之算式

圖形問題 學生代號	A	B	C	D
S1	10(10＋1)/2	10×4＋4	10×4＋1	10×10
S2	(1＋10)10/2	10×4＋4	10×4＋1	[1＋(2×10－1)]10/2
S3	(1＋10)10/2	(10＋2)2＋10×2	1＋10×4	[1＋(2×10－1)]10/2

學生歸納階段呈現「單位組合基模」與「圖形結構基模」兩類概念基模。「單位組合基模」是將圖形中的物件予以「單位化」，利用符應圖次的關係求解的心智模式，3 位學生皆採取此

概念基模對圖 C 進行解題；「圖形結構基模」是將具有典型圖形結構之相關要素結合，例如高或邊長，然後符應圖次建構之解題心智模式，3 位學生皆採取此概念基模對圖 A 與 D 進行解題。進一步將 3 位學生在一般化各階段運用之概念與運算基模予以彙整，歸納如表 7 和表 8 所示。

表 7

學生在一般化各階段彙整的概念基模

圖形問題 / 學生代號	A	B	C	D
S1發想階段	整體圖形關係	整體圖形關係	整體圖形關係	整體圖形關係
連結階段	圖形特徵與圖次比對	圖形特徵與圖次比對	圖形特徵與圖次比對	圖形特徵與圖次比對
歸納階段	圖形結構基模	單位組合基模	單位組合基模	圖形結構基模
S2發想階段	部分結構要素	部分結構要素	部分結構要素	部分結構要素
連結階段	物件計數與圖次比對	圖形特徵與圖次比對	圖形特徵與圖次比對	物件計數與圖次比對
歸納階段	圖形結構基模	單位組合基模	單位組合基模	圖形結構基模
S3發想階段	部分結構要素	部分結構要素	部分結構要素	部分結構要素
連結階段	物件計數與圖次比對	物件計數與圖次比對	物件計數與圖次比對	物件計數與圖次比對
歸納階段	圖形結構基模	單位組合基模	單位組合基模	圖形結構基模

將表 7 與表 8 資料加以比對分析，發現 3 位學生針對四項圖形作業，在一般化不同階段運用的基模類型有顯著變化。以 S1 為例，在四項圖形作業發想階段都是以整體圖形關係概念基模進行一般化，但在圖形 B 與 C 之歸納階段則轉換成單位組合基模進行解題，為何會有如此的轉變？其解釋說明如下：

S1：我感覺用整個圖形扣除正方形這個計算方法非常麻煩，要算很久，上課時聽到 S2 和其他同學用的算法很簡單，所以我就改成 S2 的方法，我覺得他們的方法很容易就算出答案了。【2009.09.22-1B（g）】

S1：我原先的方法是整個正方形減去這四個部分（指圖形 C），剩下來的就是答案，這個答案其實可以直接算黑色的方塊數目，就是 S2 他們用的方法。【2009.09.22-1C（g）】

表 8

學生一般化歷程彙整之運算基模

圖形問題／學生代號	A	B	C	D
S1發想階段	乘法基模	實用基模	實用基模	乘法基模
連結階段	乘法基模	實用基模	實用基模	乘法基模
歸納階段	乘法基模	實用基模	實用基模	乘法基模
S2發想階段	加法基模	加法基模	實用基模	加法基模
連結階段	加法基模	實用基模	實用基模	加法基模
歸納階段	實用基模	實用基模	實用基模	實用基模
S3發想階段	加法基模	加法基模	加法基模	加法基模
連結階段	加法基模	加法基模	加法基模	加法基模
歸納階段	實用基模	實用基模	實用基模	實用基模

S1：我原先的方法算出的答案和現在用的方法算出的答案是一樣的，這兩種方法雖然不同，但答案都是一樣，是因為我們的想法不一樣造成的，但是 S2 他們的想法比較簡單。【2009.09.22-1B（g）】

另外，S2 在圖形 A 和 D 作業發想與連結階段，皆採取部分結構要素的概念基模計畫解題，但歸納階段則轉換成圖形結構基模；針對圖形 B 與 C 的作業，發想階段亦採取部分結構要素的概念基模計畫解題，在連結階段因規則建立轉換成圖形特徵與圖次比對概念基模，但歸納階段發現圖形中之相同要素可以組合成單位協助其運算，又轉換成單位組合基模，S2 說明如下：

S2：對於這兩個圖形中的黑點數目（圖形 A 和 D），我很想一列一列的加起來算，我發現把他們加起來算很像是用梯形的面積公式的算法，算了之後，答案一樣，所以就用面積的公式計算。【2009.09.22-2A（g）】

S2：這個圖形是由這個個方塊和這四邊組成的，每一邊的方塊都一樣，和圖形的號碼也一樣，要算第幾個圖的方塊，將號碼乘以 4 之後再加上 4 就可以了。【2009.09.22-2B（g）】

S2：十字架有四邊，每一邊的方塊都一樣，將號碼乘以 4 之後再加上中間這個方塊就可以了。【2009.09.22-2C（g）】

S3 與 S2 在發想與歸納階段雖然採取相同的概念基模進行一般化，但深入分析仍有差異存在，原因在於連結與歸納階段之運算策略有所轉變，他解釋如下：

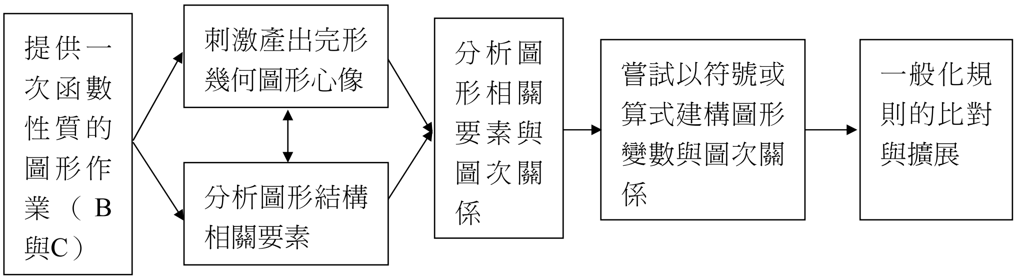
S3：像這個圖形（圖形 C），我本來的想法是第一個圖有五個黑點，第二個圖四邊各增加一個，也就是增加四個，是 5＋4，第三個圖再增加四個，是 5＋4＋4，第四個圖是 5＋4＋4＋4，後來看到每個圖都是增加四個，第一個圖是 1＋4，第四個圖可以用 1＋4×4 就可算出。【2009.10.29-3C（g）】

S3：老師要我們用算式表示問題，如果我再用這個方法加起來會很麻煩，我就想要用什麼方式可以表示，這個圖形（圖 B），第一個圖中間有一個方塊，這邊是 1＋2，他的上下是一個，所以用(1＋2)×2＋1×2……，第三個圖可以用(3＋2)×2＋3×2……，因為第三個圖時，裡面正方形的邊有三個，第四個圖時，裡面正方形的邊有四個。【2009.10.08-3B（g）】

由上述行動和說明顯示學生在圖形規律問題一般化歷程，從初始發想階段至最後解題的歸納階段，概念與運算基模有所改變與轉換，分析基模轉換的原因在於：（一）發現圖形中相同要素的物件可加以組合形成「單位化」協助解題，因此改變原先不合宜之基模，這可從 S1 發想階段以整體圖像結構基模，至歸納階段轉換成單位組合基模解題為例加以說明；（二）因原有運算方式無法配合更高階知識的應用，像是要求學生以算式表示問題的關係，致使提取像面積公式之舊有經驗以方便解題，此可以 S2 和 S3 在歸納階段採取圖形結構基模為例；（三）從連結階段中圖次號碼與圖形要素間的規則建立，促使學生整合與理解圖形結構的關係，擴增其既有基模知識。另發現基模的轉換具有兩項特質：（一）從對圖形問題之算術計數朝向符號運用之更精細代數思考心智模式的運用；（二）從圖形部分要素之分析與運算朝向整體結構關係之整合。這些發現可提供教師一般化教學啟示：（一）教學互動中，師生之間解題策略的討論與分享，可促進認知衝突產生，協助改變解題之心智模式；（二）藉由比較、分析一般化歷程產出之策略，可促進學生對不同策略和方法的省思，瞭解採用的方法或算式雖不同，但皆具有等值的意義，擴展基模知識；（三）一般化的問題不只是求得問題的答案侷限算術解答，應鼓勵學生採用符號進行代數思考，整合問題中變數之結構的關係，如此一般化才具效用。

配合圖形問題之特徵，將研究結果加以整合可建構出兩種學生一般化解題的模式，如圖 8 所示。這兩種解題模式的進展，主要參照兩方面因素的影響而建構，一是圖形結構的性質，本研究之作業分成一次（圖形 B 與 C）與二次函數特徵（圖形 A 與 D）的圖形，致使學生在一般化發想至歸納期間運用的基模明顯有所差異；另一影響要素則是學生一般化解題經驗與知識，亦即學生在思考與解決圖形問題時，習慣採取圖形或數字表徵所引發或建構的基模進行解題。教學模式 1 可稱為「利用圖形結構一般化的解題模式」，其作業特質是一次函數性質

模式1：利用圖形結構一般化解題



模式2：利用數字序列一般化解題

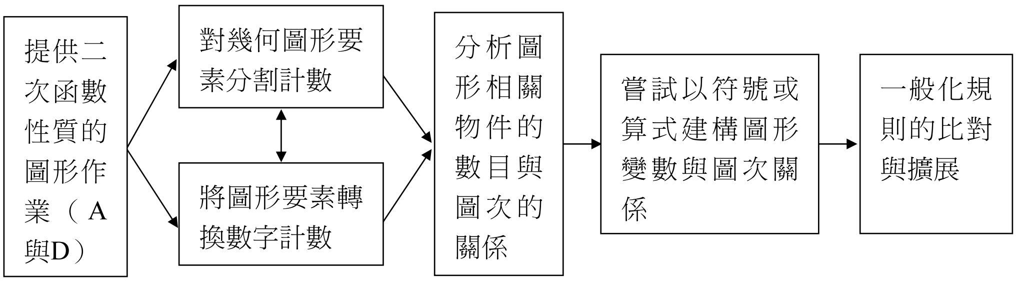


圖8.　從學生基模運用建構之一般化解題模式

的圖形，一些學生解題時可採用「整體圖形關係」基模建構完形幾何圖形，利用面積公式思考解題；另一些學生則進一步轉換圖形要素的分析，或直接對圖形要素進行分析，例如找出高或邊長的數量，運用分割加總數量的方式解題，在這歷程，透過連結圖形相關物件的數目與圖次的關係，可建立一般化的規則。

解題模式 2 可稱為「利用數字序列一般化的解題模式」，其作業情境是提供二次函數性質的圖形，一些學生則採取「部分結構要素」基模將圖形內部之物件予以分割計數或轉換物件成數字進行加總，從分析圖形相關物件的數目與圖次的關係後，嘗試以符號或算式建構圖形物件與圖次關係的規則，進而解題。這兩種解題模式亦說明由於知覺與論述不同，在一般化歷程，學生對相同的樣式可運用和轉換不同的基模，所以在最後歷程應協助學生辨認所產出一般化的變異性和等值的概念。

伍、結論與建議

本研究旨在探索國小學生對圖形規律問題一般化歷程產出的基模，以掌握學生一般化認知結構，理解其一般化運作情形；並探討學生一般化歷程基模轉換的情形，建構一般化解題模式，以提升代數思考教學的成效。歸納研究發現，獲得以下結論：

一、學生在發想階段利用「整體圖形關係」和「部分結構要素」概念基模計畫解題，在

連結階段則運用「圖形特徵與圖次比對」和「物件計數與圖次比對」概念基模進行圖形與圖次關係的連結，在歸納階段則採用「單位組合基模」與「圖形結構基模」概念基模，協助其整合運算規則或算式進行解題。在一般化歷程中，學生亦利用「加法基模」、「乘法基模」與「實用基模」輔以「分割」、「平移」、「旋轉」、「填補」與「全等」等運算基模協助建構完形圖形，配合經驗有關之心智模式解題。

二、一般化發想階段運用之基模會導引及影響隨後連結與歸納階段概念與運算基模和解題策略方式的運用，然而，學生因圖形結構的性質與一般化解題經驗與知識，讓其在一般化歷程上產生基模與解題策略的改變與轉換，使其朝向更精細代數思考心智模式的運用與圖形整體結構關係之整合。以一般化基模運作與發展作為基礎，可建構出「利用圖形結構一般化」與「利用數字序列一般化」兩種解題模式，提供教學參考。

本研究結果可協助數學教育相關人員進行數學一般化領域知識之統整，明瞭學生一般化概念之發展脈絡，並提供以下貢獻啟示：

一、本研究解析出之學生一般化歷程建構與產出之概念或運算基模類型，可以協助教師明瞭學生面對圖形規律問題時，會因發想階段計畫解題使用的心智模式有所不同，甚或影響一般化整個歷程之心智模式運用；有些學生喜愛運用圖形結構方式解題，有些則愛採取數列方式促進思考，針對學生圖形樣式一般化的學習，學生會呈現不同的思考模式和解題策略，因此，教師宜針對學生學習風格，安排有利之教學順序與教學方法，有效整合學生一般化學習軌道，提升學生數學學習成就。

二、本研究發現學生因認知衝突、對問題變數關係的理解而改變與擴展基模的發展，最終解決圖形一般化的問題，此歷程提供了學生學習一般化影響的因素，像圖形特徵、變數之間的結構關係，可作為提升代數思考教學應注意的要點外，另外，也協助瞭解學生算術思考轉換至代數思考之基模改變和轉換的機制，協助學生掌握圖形規律問題一般化重點，促進其在一般化歷程中如何將相關變項之關係的組合和連結，建構數學規則及概念，並類推應用解題，實踐一般化教學目標。

三、本研究探討、分析學生圖形樣式一般化歷程之基模結構，歸納出一般化各階段相關之概念與運算基模，除驗證 Rivera（2010）先前研究提出學生會運用「加法基模」、「乘法基模」、「實用基模」並輔以其他像分割、填補等機制進行一般化解題外，另擴展了其一般化概念模式的範圍，包含發想、連結與歸納各階段發展所需基模知識，可補充與精緻化 Rivera 之研究基礎，並可支持其一般化塑樣與假設之行動歷程模式，協助瞭解學生一般化歷程所需之知識和能力，並建構完整一般化學習之理論。另外，根據學生運用基模解題建構之「利用圖形結構一般化解題」和「利用數字序列解題」兩種教學模式，可提供教師針對學生圖形樣式之一般化學習給予適切步驟之引導，提升學生代數思考之效果。

綜合前述研究發現，爰提出以下建議，作為未來數學教育研究之參考：

一、學生在圖形規律問題解題歷程所需之一般化基模雖然繁複，但有規則可循，教師可針對重點於教學歷程中予以強化，裨益相關基模之連結與轉換，擴大學生學習心智模式。

二、要完成一般化教學目標，不應只要求學生採取算術思考運算問題答案結果，更應將相關之變數予以連結，鼓勵學生採用符號與公式思考問題結構的關係，如此學生才能體會代數思考之重要性，並應用其有效解決複雜數學問題。

三、學生採用不同類型之基模進行圖形規律問題解題，牽涉到學生學習風格展現，教師有必要瞭解學生學習採用習慣，予以教材與教學方法的配合，協助其在合適的條件下，有效進行數學學習。

誌謝

本研究承蒙行政院國家科學委員會專題研究計畫（計畫編號：NSC100-2511-S-168-003-）補助經費、審查委員提供寶貴意見，特此致謝。

參考文獻

一、中文文獻

吳昭容、徐千惠（2010）。兒童如何在重複中找到規律？重複樣式的程序性與概念性知識。**教育科學研究期刊，55**（1），1-25。

【Wu, C.-J., & Hsu, C.-H. (2010). How do children find patterns in reiteration? Procedural knowledge and conceptual knowledge in identifying repeating patterns. *Journal of Research in Education Sciences, 55*(1), 1-25.】

馬秀蘭（2008）。國小高年級學童解樣式題之代數思考：以線性圖形樣式題為例。**科學教育研究與發展季刊，50**，35-52。

【Ma, H.-L. (2008). The algebraic thinking of upper-grade students to solve linear patterns with pictorial contents. *Research and Development in Science Education Quarterly, 50*, 35-52.】

教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要：數學學習領域**。臺北市：作者。

【Ministry of Education. (2003). *Grade 1-9 curriculum guidelines: Learning areas of mathematics*. Taipei, Taiwan: Author.】

陳嘉皇（2006）。國小五年級學童代數推理策略應用之研究：以「圖卡覆蓋」解題情境歸納算式關係為例。**屏東教育大學學報，25**，381-412。

【Chen, C.-H. (2006). A study of apply strategies on algebraic reasoning: An example from cover and arrange grids to generalize mathematical equation. *Journal of National Pingtung University of Education, 25*, 381-412.】

陳嘉皇（2007）。學童「圖卡覆蓋」代數推理歷程之研究－以三個個案為例。**國民教育研究學報，19**，79-107。

【Chen, C.-H. (2007). A study on the development process analysis of algebraic reasoning: Three examples from student's cardboard covering. *Journal of Research on Elementary and Secondary Education, 19*, 79-107.】

陳嘉皇（2011）。不同等號概念之基模導向解題教學實驗研究。**教育研究集刊，57**（3），39-74。

【Chen, C.-H. (2011). Schema-based problem-solving instruction experiment of different concepts of the equal sign to first graders. *Bulletin of Educational Research, 57*(3), 39-74.】

陳慧姿（2009）。從基模理論談數學文字題閱讀理解及其對數學教學的啟示。**教育研究，17**，219-230。

【Chen, H.-T. (2009). An application of schema theory-based approach to the comprehension of verbal mathematical questions. *Education Research, 17*, 219-230.】

陳麗華（1988）。基模理論與教科書內容的設計。**現代教育，4**（10），128-139。

【Chen, L.-H. (1988). Schema theory and design of textbooks. *Modern Education, 4*(10), 128-139.】

二、外文文獻

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4; pp. 121-128).

Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Cheng, P. W., & Holyoak, K. J. (1985). Pragmatic reasoning schemas. *Cognitive Psychology, 17*(4), 391-416. doi:10.1016/0010-0285(85)90014-3

Chinnappan, M., & Thomas, M. (2003). Teachers' function schemas and their role in modelling. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 151-170. doi:10.1007/BF03217376

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic. doi:10.1007/0-306-47203-1_2

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1&2), 103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology, 12*(3), 306-355. doi:10.1016/0010-0285(80)90013-4

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology Research and Development, 48*(4), 63-85. doi:10.1007/BF02300500

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lobato, J., Ellis, A. B., & Muñoz, R. (2003). How "focusing phenomena" in the instructional environment support individual students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 1-36. doi:10.1207/S15327833MTL0501_01

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Cambridge, IL: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511527890

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic. doi:10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London, UK: The Open University.

Mayer, R. E. (1991). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York, NY: Freeman.

Moss, J., Beatty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2006, April). *The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in mathematics*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Piaget, J. (1977). *Psychology and epistemology: Towards a theory of knowledge*. New York, NY: Penguin.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, CA: Princeton University Press.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297-328. doi:10.1007/s10649-009-9222-0

Rivera, F. D., Knott, L., & Evitts, T. A. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher, 101*(1), 69-75.

Seel, N. M., Ifenthaler, D., & Pirnay-Dummer, P. (2009). Mental models and problem solving: Technological solutions for measurement and assessment of the development of expertise. In P. Blumschein, W. Hung, D. Jonassen, & J. Strobel (Eds.), *Model-based approaches to learning: Using systems models and simulations to improve understanding and problem solving in complex domains* (pp. 17-40). Rotterdam, the Netherlands: Sense.

Shipley, E. F. (1993). Categories, hierarchies, and induction. In D. Medin (Ed.), *Psychology of learning and motivation* (Vol. 30; pp. 265-301). San Diego, CA: Academic Press. doi:10.1016/S0079-7421(08)60299-6

Silver, E. A. (1997). Algebra for all: Increasing students' access to algebraic ideas, not just algebra courses. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2*(4), 204-207.

Sophian, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York, NY: Erlbaum.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Journal of Research in Education Sciences
2013, 58(1), 59-90
doi:10.3966/2073753X2013035801003

Application of Generalization Schemas to Solve Figural Pattern Problems on Sixth Graders

Chia-Huang Chen
Department of Mathematics Education,
National Taichung University of Education

Abstract

The purpose of this study is to enhance our understanding of the generalization process by examining the generalization schemas of figural pattern problems and capturing the cognitive structure of generalization, and by examining the ways in which to improve the generalization schema transformation to construct models for solving generalization problems and promote the effects of algebraic thinking. Three Grade six students in a teaching activity setting completed 32 tasks related to figural pattern problems, and the worksheets and interviews data were collected. The data were analyzed qualitatively, and three stages were considered: (1) Students used both the "relationship of whole figure" and "elements of part structure" concept schemas for problem-solving planning in the abductive stage; (2) both schemas were applied during the connection stage on the "figural characterizes contrast with figural terms" and "objects count contrast with figural terms" to combine the relationship between figures and terms; (3) students used both the "unit combined" and "figural structure" concept schemas to solve the figural pattern problems during the generalized stage. Students used "addition," "multiplication," and "practical" operation schemas to integrate the rules and expressions for resolving the figural pattern problems. The change and transformation of the schemas during generalization were influenced by student knowledge, experiences, and characteristics of the figural structure. Researchers constructed both the "utilize the figural structure" and "utilize the number alley" models for problem-solving generalization learning based on students'

Corresponding Author: Chia-Huang Chen, E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw
Manuscript received: May 6, 2012; Revised: Nov. 11, 2012, Dec. 9, 2012; Accepted: Jan. 30, 2013.

generalization schema operation and development. The findings such as the models of problem-solving generalization support teachers' instruction, engaging students in algebraic thinking and implementing algebraic teaching with figural pattern problem solving.

Keywords: generalization, algebraic thinking, schema, figural pattern problem